О КОНЕЧНЫХ ГРУППАХ G С НЕСВЯЗНЫМ ГРАФОМ ПРОСТЫХ ЧИСЕЛ И ОГРАНИЧЕНИЯМИ НА $\pi_1(G)$

В.А. Колпакова

Институт математики и механики УрО РАН
С. Ковалевской 16, 620990 Екатеринбург, Россия leralid@mail.ru

Пусть G — конечная группа. Обозначим через $\pi(G)$ множество всех простых делителей порядка группы G. *Граф простых чисел* (*граф Грюнберга — Кегеля*) $\Gamma(G)$ группы G определяется как граф с множеством вершин $\pi(G)$, в котором две различные вершины p и q смежны тогда и только тогда, когда в G есть элемент порядка pq. Группа G называется *n-примарной*, если $|\pi(G)| = n$. Обозначим число компонент связности графа $\Gamma(G)$ через $s(G)$, а множество его связных компонент — через $\{\pi_i(G) \mid 1 \leq i \leq s(G)\}$; для группы G четного порядка считаем, что $2 \in \pi_1(G)$.

В рамках общей задачи изучения конечных групп по свойствам их графов простых чисел наше внимание прежде всего привлекает более подробное изучение класса конечных групп с несвязным графом простых чисел. Это объясняется тем, что указанный класс широко обобщает класс конечных групп Фробениуса, что сразу видно из известной структурной теоремы Грюнберга —Кегеля о конечных группах с несвязным графом простых чисел (см. [1]). Заметим также, что класс конечных групп с несвязным графом простых чисел совпадает с классом конечных групп, имеющих изолированную подгруппу.

В рамках отмеченной задачи А.С. Кондратьев и И.В. Храмцов [4] — [7] изучали конечные группы, имеющие несвязный граф простых чисел с числом вершин, не превосходящим 4. А.С. Кондратьевым были определены конечные почти простые 5-примарные группы и их графы Грюнберга — Кегеля [8]. Автором совместно с А.С. Кондратьевым [9] было получено описание главных факторов коммутантов конечных неразрешимых 5-примарных групп G с несвязным графом Грюнберга—Кегеля в случае, когда $G/F(G)$ — почти простая n-примарная группа для $n \leq 4$. Наша цель — описать 5-примарные группы G с несвязным графом простых чисел в остальных случаях. Естественным является начать изучение, накладывая некоторые ограничения на компоненту $\pi_1(G)$. Результатом этой работы является описание 5-примарных групп G с несвязным графом простых чисел таких, что либо $\pi_1(G) = \{2\}$, либо $3 \notin \pi_1(G) \neq \{2\}$ и $3 \in \pi(G)$. Доказаны две теоремы.

Теорема 1. *Пусть G — конечная 5-примарная группа и $\pi_1(G) = \{2\}$. Тогда выполняется одно из следующих утверждений:*

(1) *$G \cong O(G) \leftthreetimes S$ — группа Фробениуса, где $O(G)$ — 4-примарная абелева группа и S — циклическая 2-группа или обобщенная группа кватернионов;*

(2) *G — группа Фробениуса с ядром $O_2(G)$ и 4-примарным дополнительным множителем;*

(3) *$G \cong A \leftthreetimes (B \leftthreetimes C)$ — 2-фробениусова группа, где $A = O_2(G)$, B — циклическая 4-примарная $2'$-группа и C — циклическая 2-группа;*

(4) *$G \cong L_2(r)$, $r \geq 65537$ — простое число Ферма или Мерсенна и $|\pi(r^2 - 1)| = 4$;*

(5) *$\overline{G} = G/O_2(G) \cong L_2(2^m)$, где либо $m \in \{6, 8, 9\}$, либо $m \geq 11$ — простое число. Если $O_2(G) \neq 1$, то $O_2(G)$ является прямым произведением минимальных нормальных подгрупп порядка 2^{2m} в G, каждая из которых как $\overline{G}$-модуль изоморфна естественному $GF(2^m)SL_2(2^m)$-модулю;*

(6) *$\overline{G} = G/O_2(G) \cong Sz(q)$, где $q = 2^p$, $p \geq 7$ и $q - 1$ — простые числа, $|\pi(q - \varepsilon\sqrt{2q} + 1)| = 2$ и $|\pi(q + \varepsilon\sqrt{2q} + 1)| = 1$ для $\varepsilon \in \{+, -\}$, $5 \in \pi(q - \varepsilon\sqrt{2q} + 1)$. Если $O_2(G) \neq 1$, то $O_2(G)$ является прямым произведением минимальных нормальных подгрупп порядка q^4 в G, каждая из которых как $\overline{G}$-модуль изоморфна естественному 4-мерному $GF(q)Sz(q)$-модулю.*

Теорема 2. *Пусть G — конечная 5-примарная группа с несвязным графом простых чисел, $\overline{G} = G/F(G)$ — почти простая 5-примарная группа, $3 \in \pi(G)$ и $3 \notin \pi_1(G) \neq \{2\}$. Тогда выполняется одно из следующих утверждений:*

(1) *G изоморфна $L_2(5^3)$ или $L_2(17^3)$;*

(2) *$G \cong L_2(p)$, где либо $p \geq 65537$ — простое число Ферма или Мерсенна и $|\pi(p^2-1)| = 4$, либо $p \geq 41$ — простое число, $|\pi(p^2-1)| = 4$ и $3 \in \pi(\frac{p+1}{2})$;*

(3) *G изоморфна $L_2(3^r)$ или $PGL_2(3^r)$, где r — нечетное простое число, $|\pi(3^{2r}-1)| = 4$ и $r \notin \pi(G)$;*

(4) *$G \cong L_2(p^r)$, где $p \in \{5, 17\}$, r — нечетное простое число, $|\pi(p^{2r}-1)| = 4$, $3 \in \pi(\frac{p^r+1}{2})$ и $r \notin \pi(G)$.*

Работа выполнена при финансовой поддержке программы РНФ для отдельных научных групп (проект 14-11-00061).

Литература

1. Williams J. S. *Prime graph components of finite groups* // J. Algebra. 1981. V. 69. № 2. P. 487–513.

2. Кондратьев А. С. *О компонентах графа простых чисел конечных простых групп* // Мат. сб. 1989. Т. 180. № 6. С. 787–797.

3. Lucido M. S. *Prime graph components of finite almost simple groups* // Rend. Sem. Mat. Univ. Padova. 1999. V. 102. P. 1–22; addendum, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova. 2002. V. 107. P. 189–190.

4. Кондратьев А. С., Храмцов И. В. *О конечных трипримарных группах* // Труды Ин-та математики и механики УрО РАН. 2010. Т. 16. № 3. С. 150–158.

5. Кондратьев А. С., Храмцов И. В. *О конечных четырепримарных группах* // Труды Ин-та математики и механики УрО РАН. 2011. Т. 17. № 4. С. 142–159.

6. Кондратьев А. С., Храмцов И. В. *О конечных непростых трипримарных группах с несвязным графом простых чисел* // Сиб. эл. матем. изв. 2012. Т. 9. С. 472–477.

7. Храмцов И. В. *О конечных непростых* 4*-примарных группах* // Сиб. эл. матем. изв. 2014. Т. 11. С. 695–708.

8. Kondrat'ev A. S. *Finite almost simple* 5*-primary groups и their Gruenberg-Kegel graphs* // Сиб. эл. мат. изв. 2014. Т. 11. С. 634–674.

9. Колпакова В. А, Кондратьев А. С *О конечных неразрешимых 5-примарных группах с несвязным графом Грюнберга — Кегеля таких, что $|\pi(G/F(G))| \leq 4$* // Фунд. и прикл. матем., в печати.