КОНЕЧНЫЕ ГРУППЫ С ОБОБЩЕННО СУБНОРМАЛЬНЫМИ n-МАКСИМАЛЬНЫМИ ПОДГРУППАМИ

В.А. Ковалева[1]

[1]Гомельский государственный университет имени Ф. Скорины, Советская 104, 246019 Гомель, Беларусь
vika.kovalyova@rambler.ru

Все рассматриваемые в сообщении группы являются конечными. Символом $\pi(G)$ обозначается множество всех простых делителей порядка группы G.

Напомним, что собственная подгруппа M группы G называется *максимальной подгруппой* в G, если M не содержится ни в какой другой собственной подгруппе из G.

Результаты, связанные с изучением максимальных подгрупп, составили одно из самых содержательных направлений в теории конечных групп. Прежде всего это связано с тем, что многие известные классы групп допускают описание на основе свойств максимальных подгрупп. Кроме того, максимальные подгруппы лежат в основе многих важных признаков принадлежности группы выделенному классу групп. Наиболее известными среди них являются теорема Дескинса-Янко-Томпсона о разрешимости группы, обладающей нильпотентной максимальной подгруппой, класс нильпотентности 2-силовских подгрупп которой не превосходит двух, а также теоремы О.Ю. Шмидта и Б. Хупперта о разрешимости групп, все максимальные подгруппы которых являются нильпотентными и сверхразрешимыми соответственно.

По мере развития теории максимальных подгрупп авторами стали предприниматься попытки изучения и применения их обобщений. Так, одним из обобщений максимальной подгруппы является понятие n-максимальной подгруппы. Напомним, что подгруппа H группы G называется 2-*максимальной* (*второй максимальной*) подгруппой в G, если H является максимальной подгруппой в некоторой максимальной подгруппе M группы G. Аналогично могут быть определены 3-*максимальные* подгруппы и т.д.

Работы, посвященные изучению n-максимальных подгрупп ($n > 1$), составили обширное направление теории конечных групп, обогащенное большим числом глубоких теорем и содержательных примеров. Наиболее ранние результаты в этом направлении были получены Л. Редеи [1], описавшим неразрешимые группы с абелевыми вторыми максимальными подгруппами, и Б. Хуппертом [2], установившим сверхразрешимость группы, в которой все вторые максимальные подгруппы нормальны. Кроме того, в этой же работе Хупперт доказал, что в случае, когда все 3-максимальные подгруппы группы G нормальны, коммутант G' является нильпотентной группой и главный ранг группы G не превосходит двух. Позже, результаты Редеи и Хупперта получили обобщение и развитие в работах многих других авторов (З. Янко, М. Судзуки, Т.М. Гаген, В.Е. Дескинс, А.Е. Спенсер, А. Манн, Р. Шмидт, В.А. Ведерников, Э.М. Пальчик, Н.П. Конторович, Я.Г. Беркович, Р.К. Агравал, П. Флавелл, А. Баллестер-Болинше, Л.М. Эскуэрро, В. Го, Ш. Го, К.П. Шам, Б. Ли, Ш. Ли, В.А. Белоногов, В.С. Монахов, А.Н. Скиба, В.Н. Княгина, Д.П. Андреева, Е.В. Легчекова, Ю.В. Луценко и др.). В этой связи, следует прежде всего отметить не потерявшую свое фундаментальное значение и в настоящее время работу А. Манна [3], в которой отмеченные выше результаты Хупперта были перенесены не только на субнормальные подгруппы, но и на произвольное n, зависящее только от числа простых делителей порядка группы. В частности, Манном было доказано, что если все n-максимальные подгруппы разрешимой группы G субнормальны и $|\pi(G)| \geq n+1$, то G нильпотентна; если же $|\pi(G)| \geq n-1$, то G является ϕ-дисперсивной для некоторого упорядочения ϕ множества $\pi(G)$. И наконец, в случае, когда $|\pi(G)| = n$, Манн привел полное описание группы G.

Пусть $\mathfrak{F}$ — класс групп. Напомним, что подгруппа H группы G называется $\mathfrak{F}$-*субнормальной* *в смысле Кегеля* [4] или K-$\mathfrak{F}$-*субнормальной* [5] в G, если найдется такая цепь подгрупп

$$H = H_0 \leq H_1 \leq \cdots \leq H_n = G,$$

что либо H_{i-1} нормальна в H_i, либо

$$H_{i-1}/(H_{i-1})_{H_i} \in \mathfrak{F}$$

для всякого $i = 1, \ldots, n$.

Нами получена полная классификация групп, у которых все вторые либо все третьи максимальные подгруппы K-$\mathfrak{F}$-субнормальны в случае, когда $\mathfrak{F} = \mathfrak{U}$ — класс всех сверхразрешимых групп, что, в свою очередь, позволило обобщить и развить результаты многих из упомянутых выше авторов (Б. Хупперт, Р.К. Агравал, В.Н. Семенчук, В.С. Монахов, В.Н. Княгина, А.Н. Скиба, Ю.В. Луценко и др.). Отметим, что для получения такой классификации ранее в работах [6, 7] было получено расширение отмеченных результатов работы А. Манна [3] до K-$\mathfrak{U}$-субнормальных подгрупп, что, в свою очередь, привело к необходимости развития соответствующих результатов Х. Виландта, К. Дёрка, О.-Ю. Крамера и др.

Литература

1. Rédei L. *Ein Satz uber die endlichen einfachen Gruppen* // Acta Math. 1950. Vol. 84. P. 129-153.
2. Huppert B. *Normalteiler und maximal Untergruppen endlicher gruppen* // Math. Z. 1954. Vol. 60. P. 409-434.
3. Mann A. *Finite groups whose n-maximal subgroups are subnormal* // Trans. Amer. Math. Soc. 1968. Vol. 132. P. 395-409.
4. Kegel O.H. *Zur Struktur mehrfach faktorisierbarer endlicher Gruppen* // Math. Z. 1965. Vol. 87. P. 409-434.
5. Ballester-Bolinches A., Ezquerro L. M. *Classes of Finite Groups*. Dordrecht: Springer-Verlag, 2006.
6. Ковалева В. А., Скиба А. Н. *Конечные разрешимые группы, у которых все n-максимальные подгруппы $\mathfrak{U}$-субнормальны* // Сибирский математический журнал. 2013. Т. 54, № 1. Р. 86-97.
7. Kovaleva V. A., Skiba A. N. *Finite soluble groups with all n-maximal subgroups $\mathfrak{F}$-subnormal* // Journal of Group Theory. 2014. Vol. 17. P. 273-290.