ЗНАЧЕНИЯ ЦЕЛОЧИСЛЕННЫХ МНОГОЧЛЕНОВ БЕЗ ОБЩИХ КОРНЕЙ В ПОЛЯХ КОМПЛЕКСНЫХ И p-АДИЧЕСКИХ ЧИСЕЛ

Э.И. Ковалевская[1], О.Н. Кемеш, О.В. Рыкова[2]

Белорусский государственный аграрный технический университет
пр. Независимости 99, 220023 Минск
[1]ekovalevsk@mail.ru, [2]oly8521@yandex.ru

В теории трансцендентных чисел известны неравенства Гельфонда [1] для значений двух многочленов P_1, $P_2 \in \mathbb{Z}[x]$ в трансцендентной точке, при выполнении которых получаем, что P_1 и P_2 обязательно имеют общий корень. Мы обобщаем и усиливаем *лемму Гельфонда* в важных для приложений случаях.

Пусть $P = P(t) \in \mathbb{Z}[t]$, $\deg P = n$ и высота многочлена $H(P)$ равна H, где $H(P)$ — это максимум модулей его коэфициентов. Через $c_i = c_i(n)$, $i = 1, 2, 3, 4$, обозначим некоторые величины, зависящие от n и не зависящие от H. Пусть $p \geq 2$ — простое число, $x \in \mathbb{R}$, $\omega \in \mathbb{Q}_p$ — трансцендентные числа. Если многочлен P приводим над $\mathbb{Z}$, т. е. $P(t) = P_1(t) \cdot P_2(t)$, то хорошо известно (см. [2, с. 26]), что $n = n_1 + n_2$, где $n_1 = \deg P_1$, $n_2 = \deg P_2$, и $c_1 H < H(P_1)H(P_2) < c_2 H$. Положим $H(P_1) = H^{\lambda_1}$ при $0 \leq \lambda_1 \leq 1$, $H(P_2) = H^{1-\lambda_1}$. Приведем *неравенство Гельфонда* для P_1, $P_2 \in \mathbb{Z}[t]$ без общих корней [1, с. 182]:

$$1 \leq c_3(|P_1(t)| + |P_2(t)|) \cdot H(P_1)^{\deg P_2} \cdot H(P_2)^{\deg P_1}, \quad \max_{i=1,2} H(P_i) \leq Q. \tag{1}$$

Отсюда если $\min_{i=1,2} |P_i(t)| \leq Q^{-w}$ при $w > 0$, то $w \leq 2n$, иначе неравенство (1) противоречиво.

Мы получаем неравенство вида (1)для многочленов P_1, $P_2 \in \mathbb{Z}[t]$ без общих корней в поле $\mathbb{C}$ и алгебраическом замыкании $\mathbb{Q}_p^*$ поля $\mathbb{Q}_p$:

$$1 \leq c_4 \max_{i=1,2} |P_i(t)| \cdot \max_{i=1,2} |P_i(\omega)|_p \cdot Q^{\lambda_1(n-n_1)+(1-\lambda_1)n_1}, \quad \max_{i=1,2} H(P_i) \leq Q. \tag{2}$$

Нетрудно показать, что $\lambda_1(n - n_1) + (1 - \lambda_1)n_1 \leq n - 1$. Поэтому если $\max_{i=1,2} |P_i(x)| < Q^{-w}$, $\max_{i=1,2} |P_i(\omega)|_p < Q^{-v}$, то из (2) следует, что $w + v \leq n - 1$. Неравенство (2) обобщает и усиливает неравенство (1). Отметим, что неравенство (2) в $\mathbb{Q}_p$ было доказано в [3].

Авторы выражают благодарность профессору В.И. Бернику за постановку задачи и полезные обсуждения.

Литература

1. Гельфонд А. О. *Трансцендентные и алгебраические числа.* Гос. изд. тех.-теор. лит., 1952.

2. Спринджук В. Г. *Проблема Малера в метрической теории чисел.* Наука и техника, 1967.

3. Beresnevich V. V., Bernik V. I., Kovalevskaya E. I. *On approximation of p-adic numbers by p-adic algebraic numbers* // J. Number Theory. 2005. V. 111. P. 33–56.