ПОЛУЦЕПНЫЕ ГРУППОВЫЕ КОЛЬЦА КОНЕЧНЫХ ЛИНЕЙНЫХ ГРУПП И ПРОСТЫХ ГРУПП РИ

А.В. Кухарев, Г.Е. Пунинский

Белорусский государственный университет, механико-математический факультет,
пр. Независимости, 4, 220030 Минск, Беларусь kukharev@mail.ru, punins@mail.ru

Работа посвящена исследованию вопроса о полуцепности групповых колец конечных линейных групп и простых групп лиевского типа. Кольцо R называется *полуцепным*, если оно как левый и как правый R-модуль является прямой суммой цепных модулей. В настоящее время не известно полного ответа, для каких конечных групп G групповые кольца FG над заданным полем F характеристики $p > 0$ являются полуцепными (см. [1]). Над алгебраически замкнутым полем F характеристики p полуцепность группового кольца FG конечной группы G равносильна тому, что деревья Брауэра всех дефектных p-блоков группы G имеют вид "звезды" с исключительной вершиной в центре [2, следствие VII.2.22]. В работе [3] показано, что в случае циклической дефектной группы дерево Брауэра любого p-блока группы $\mathrm{GL}(n, q)$ при $p \neq 2$, $p \nmid q$ является прямым отрезком с исключительной вершиной на конце. В [4] установлен вид деревьев Браэура групп $\mathrm{PSL}(2, q)$. Общий случай групп вида $\mathrm{PSL}(n, q)$, а также $\mathrm{SL}(n, q)$, остался нерассмотренным.

Нами получен полный ответ на вопрос, для каких чисел n, q и p групповое кольцо групп $\mathrm{GL}(n, q)$, $\mathrm{SL}(n, q)$, $\mathrm{PSL}(n, q)$ и $G_2(q)$ над произвольным полем характеристики p является полуцепным.

Теорема 1. *Пусть G — любая из групп $\mathrm{GL}(n, q)$, $n \geq 2$. Пусть F — поле характеристики p, делящей $|G|$. Тогда групповое кольцо FG полуцепное, если и только если выполнено любое из следующих условий:*

1) $n = 2$, $p = q \in \{2, 3\}$;

2) $n \in \{2, 3\}$, $p = 3$, $q \equiv 2, 5 \pmod 9$.

Теорема 2. *Пусть G — любая из групп $\mathrm{SL}(n, q)$ или $\mathrm{PSL}(n, q)$, $n \geq 2$. Пусть F — поле характеристики p, делящей $|G|$. Тогда групповое кольцо FG полуцепное, если и только если выполнено любое из следующих условий:*

1) $n = 2$ и $p \mid q - 1$, $p \neq 2$;

2) $n = 2$ и $p = q \in \{2, 3\}$;

3) $n \in \{2, 3\}$, $p = 3$ и $q \equiv 2, 5 \pmod 9$.

Используя сведения о деревьях Брауэра p-блоков конечных групп Шевалле типа $G_2(q)$ [5,6] и групп Ри ${}^2G_2(q^2)$, ${}^2F_4(q^2)$ [7], легко получить ответ о полуцепности групповых колец этих групп.

Теорема 3. *Если $G = G_2(q)$ и F — поле положительной характеристики, делящей $|G|$, то групповое кольцо FG не является полуцепным.*

Теорема 4. *Пусть $G = {}^2G_2(q^2)$, $q^2 = 3^{2m+1}$, $m \geq 0$ и F — поле характеристики p, делящей $|G|$. Групповое кольцо FG полуцепное, если и только если $p \mid q^2 - 1$.*

Теорема 5. *Если $G = {}^2F_4(q^2)$, $q^2 = 2^{2m+1}$, $m \geq 0$ и F — поле характеристики p, делящей $|G|$, то групповое кольцо FG не полуцепное.*

Литература

1. Baba Y., Oshiro K. *Classical Artinian Rings.* World Scient. Publ. 2009.

2. Feit W. *The Representation Theory of Finite Groups.* North Holland Mathematical Library. Vol. 25. 1982.

3. Fong P., Srinivasan B. *Blocks with cyclic defect groups in* $\mathrm{GL}(n, q)$ // Bull. Amer. Math. Soc. 1980. Vol. 3. P. 1041–1044.

4. Burkhardt R. *Die Zerlegungsmatrizen der Gruppen* $\mathrm{PSL}(2, p^f)$ // J. Algebra. 1976. Vol. 40. P. 75–96.

5. Shamash J. *Blocks and Brauer trees in the group $G_2(q)$ for primes dividing $q \pm 1$* // Comm. Algebra. 1989. Vol. 17. P. 1901–1949.
6. Shamash J. *Brauer trees for blocks of cyclic defect in the group $G_2(q)$ for primes dividing $q^2 \pm q + 1$* // J. Algebra. 1989. Vol. 123. P. 378–396.
7. Hiss G. *The brauer trees of the ree groups* // Comm. Algebra. 1991. Vol. 19. P. 871–888.