ПОСТОПТИМАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ЗАДАЧИ ОТЫСКАНИЯ ПОДМНОЖЕСТВА ВЕКТОРОВ

В.А. Емеличев, К.Г. Кузьмин

Белгосуниверситет, механико-математический факультет
пр-т Независимости 4, 220030 Минск, Беларусь
vemelichev@gmail.com, kuzminkg@mail.ru

Пусть задано конечное семейство векторов $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ действительного пространства $\mathbf{R}^k$ и натуральное число $m < n$. Из этого семейства требуется выбрать m векторов, евклидова норма суммы которых максимальна. Такая задача возникает (см., например, [1,2]) при нахождении фиксированного числа участков в числовой последовательности, образованной квазипериодически повторяющимся фрагментом при заданном числе повторов. Подобная ситуация типична для ряда таких приложений как радиолокация, телекоммуникация, обработка речевых сигналов, электронная разведка и др. [3]. В силу природы этих задач исходные данные – компоненты векторов – неизбежно задаются с некоторой погрешностью. В таких условиях желательно не только уметь находить оптимальные решения, но и проводить для каждого из них постоптимальный анализ, чтобы получить необходимую информацию о предельном уровне изменений в пространстве параметров, сохраняющих оптимальность выбранного решения. Числовая характеристика, определяющая указанный предельный уровень, обычно [4] называется радиусом устойчивости решения. Для того чтобы дать строгое определение радиуса устойчивости и указать его верхнюю достижимую оценку, введем ряд обозначений.

Пусть из векторов $v_1, v_2, \dots, v_n$ как из столбцов образована матрица $V = [v_{ij}] \in \mathbf{R}^{k\times n}$. Строки матрицы V будем обозначать V_i, $i \in N_k := \{1, 2, \dots, k\}$. И пусть $X \subset \{0,1\}^n$ – множество всех булевых векторов $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$, каждый из которых содержит ровно m единиц. Тогда задача $Z(V)$ поиска подмножества векторов имеет вид:

$$\|Vx\|_2 \to \max_{x\in X},$$

где $\|\cdot\|_2$ – евклидова норма в пространстве $\mathbf{R}^k$. Множество оптимальных (максимальных) решений задачи $Z(V)$ будем обозначать через $Opt(V)$.

Возмущение компонент векторов из множества $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ будем моделировать, прибавляя к исходной матрице V возмущающую матрицу $V' = [v'_{ij}] \in \mathbf{R}^{k\times n}$. Тем самым, возмущенная задача записывается в виде $Z(V + V')$, а множество ее оптимальных решений имеет вид $Opt(V + V')$.

Пусть $x^0 \in Opt(V)$. По аналогии с [4] радиусом устойчивости решения x^0 назовем число

$$\rho(x^0, V) = \begin{cases} \sup \Xi, & \text{если } \Xi \neq \emptyset, \\ 0, & \text{если } \Xi = \emptyset, \end{cases}$$

где

$$\Xi = \{\varepsilon > 0 : \ \forall V' \in \Omega(\varepsilon) \ (x^0 \in Opt(V + V'))\},$$
$$\Omega(\varepsilon) = \{V' \in \mathbf{R}^{k\times n} : \|V'\|_1 < \varepsilon\},$$
$$\|V'\|_1 = \sum_{i\in N_k} \sum_{j\in N_n} |v'_{ij}|.$$

Теорема. *Для радиуса устойчивости $\rho(x^0, V)$ оптимального решения x^0 задачи $Z(V)$ верна следующая достижимая оценка:*

$$\rho(x^0, V) \le \min_{x\in X\setminus\{x^0\}} \left(\sqrt{\sum_{i\in N_k} (V_i x^0)^2 + \max_{i\in N_k} (V_i x)^2 - \sum_{i\in N_k} (V_i x)^2} - \max_{i\in N_k} |V_i x| \right).$$

В частности, эта оценка достижима для тех задач $Z(V)$, в которых каждый вектор $x \in X \setminus \{x^0\}$ подчинен неравенству

$$\max_{i \in N_k} |V_i x| \geq \max_{i \in N_k} |V_i x^0|.$$

Работа выполнена при финансовой поддержке БРФФИ, проект №Ф13К-078.

Литература

1. Бабурин А. Е., Гимади Э. Х., Глебов Н. И., Пяткин А. В. *Задача отыскания подмножества векторов с максимальным суммарным весом* // Дискр. анализ и исслед. операций. 2007. Сер. 2. Т. 14. № 1. С. 32–42.

2. Гимади Э. Х., Глазков Ю. В., Рыков И. А. *О двух задачах выбора подмножества векторов с целочисленными координатами с максимальной нормой суммы в евклидовом пространстве* // Дискр. анализ и исслед. операций. 2008. Т. 15. № 4. С. 30–43.

3. Гимади Э. Х., Кельманов А. В., Кельманова М. А., Хамидуллин С. А. *Апостериорное обнаружение в числовой последовательности квазипериодически повторяющегося фрагмента при заданном числе повторов* // Сиб. журн. индустриальной математики. 2006. Т. 9. № 1(25). С. 55–74.

4. Emelichev V., Podkopaev D. *Quantitative stability analysis for vector problems of* 0-1 *programming* // Discrete Optimization. 2010. V. 7. N 1-2. P. 48–63.