

ОБ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ РЕШЕТКАХ ФОРМАЦИЙ КОНЕЧНЫХ ГРУПП

Н.Н. Воробьев¹, А.Р. Кузнецова²

Учреждение образования “Витебский государственный университет им. П.М. Машерова”,
кафедра алгебры и методики преподавания математики,
Московский проспект 33, 210038 Витебск, Беларусь
¹vornic2001@mail.ru, ²anyakuznetsovar@gmail.com

Все рассматриваемые группы конечны. Мы будем использовать стандартную терминологию из [1, 2].

Напомним, что формацией называется класс групп, который замкнут относительно взятия гомоморфных образов и конечных подпрямых произведений. Совокупность классов групп Θ называется полной решеткой формаций [2], если пересечение любой совокупности формаций из Θ снова принадлежит Θ , и во множестве Θ имеется такой класс $\mathfrak{F}$, что $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{F}$ для любого другого класса $\mathfrak{H} \in \Theta$. Полная решетка формаций Θ называется частичной алгеброй формаций [2] (см. также [3]), если для любого простого числа p и для любой формации $\mathfrak{F} \in \Theta$ имеет место $\mathfrak{N}_p \mathfrak{F} \in \Theta$. Здесь символом $\mathfrak{N}_p$ обозначают класс всех p -групп. Как показано в монографии А.Н. Скибы [2] такие полные решетки и частичные алгебры играют при изучении классов групп ту же роль, что и сами классы (формации, классы Фиттинга и др.) при изучении групп. Нетрудно показать, что класс всех тотально насыщенных формаций l_∞ , а при фиксированном $n \geq 0$ класс всех n -кратно насыщенных формаций l_n являются частичными алгебрами (см. подробнее [2]).

Элемент a полной решетки L называется компактным, если из неравенства $a \leq \bigvee (x_i \mid i \in I)$ следует, что $a \leq x_{i_1} \vee x_{i_2} \vee \dots \vee x_{i_n}$, где $i_1, i_2, \dots, i_n \in I$, для некоторого натурального n . Полная решетка формаций называется алгебраической, если каждый ее элемент может быть представлен в виде решеточного объединения подходящего семейства компактных элементов.

Основной результат представляет следующая

Теорема. *Всякая частичная алгебра формаций является алгебраической решеткой.*

Следствие 1 (А.Н. Скиба [2]). *Решетка всех τ -замкнутых n -кратно насыщенных формаций l_n^τ алгебраична.*

Следствие 2. *Решетка n -кратно насыщенных формаций l_n алгебраична.*

Следствие 3 (В.Г. Сафонов [4]). *Решетка всех τ -замкнутых тотально насыщенных формаций l_∞^τ алгебраична.*

Следствие 4. *Решетка тотально насыщенных формаций l_∞ алгебраична.*

Литература

1. Шеметков Л. А. *Формации конечных групп*. М.: Наука, 1978.
2. Скиба А. Н. *Алгебра формаций*. Мн.: Беларуская навука, 1997.
3. Воробьев Н. Н. *Алгебра классов конечных групп*. Витебск: ВГУ имени П.М. Машерова, 2012.
4. Сафонов В. Г. *Об алгебраичности решетки τ -замкнутых тотально насыщенных формаций* // Алгебра и логика. 2006. Т. 45. № 5. С. 620–626.