О РАВЕНСТВЕ ЧИСЕЛ P_4-УПАКОВКИ И P_4-ПОКРЫТИЯ В ГРАФАХ

Д. Б. Мокеев

НИУ Высшая Школа Экономики в Нижнем Новгороде, Лаборатория Алгоритмов и Технологий Анализа Сетевых Структур, ул. Родионова, 136, 603093 Нижний Новгород, Россия;

Нижегородский Государственный Университет им. Н.И.Лобачевского, Институт Информационных Технологий, Математики и Механики, пр. Гагарина, 23, 603950 Нижний Новгород, Россия.

MokeevDB@gmail.com

Пусть $\mathcal{F}$ – множество графов. Максимальное число попарно непересекающихся порожденных подграфов графа G, принадлежащих $\mathcal{F}$, называется числом $\mathcal{F}$-упаковки графа G. Минимальное число вершин графа G, покрывающее все порожденные подграфы из $\mathcal{F}$ называется его числом $\mathcal{F}$-покрытия.

Определение 1. Кёниговым графом относительно $\mathcal{F}$ называется граф, каждый порожденный подграф которого обладает свойством: число $\mathcal{F}$-упаковки равно числу $\mathcal{F}$-покрытия. Класс всех кёниговых графов относительно множества $\mathcal{F}$ обозначаем через $\mathcal{K}(\mathcal{F})$. Если $\mathcal{F}$ состоит из единственного графа H, то будем говорить о классе Кёниговых графов относительно H и обозначать его $\mathcal{K}(H)$.

Задаче об упаковке графа посвящено немало работ, особенно её алгоритмическим аспектам (см., например, [1, 2]). Известно, что задача поиска числа H-упаковки NP-полна для любого графа H, имеющего компоненту связности с тремя или более вершинами. Будучи сформулированы как задачи ЦЛП, задачи об $\mathcal{F}$-упаковке и $\mathcal{F}$-покрытии образуют пару двойственных задач. Кёниговы графы, таким образом, суть графы, у которых для любого порождённого подграфа отсутствует разрыв двойственности, что способствует эффективному решению этих задач для таких графов.

Класс $\mathcal{K}(\mathcal{F})$ при любом $\mathcal{F}$ является наследственным и, следовательно, может быть описан множеством запрещенных графов (минимальных по отношению «быть порожденным подграфом» графов, не принадлежащих $\mathcal{F}$). Для P_2 такую характеризацию даёт теорема Кёнига вместе с известным критерием двудольности. Кроме этой классической теоремы автору известны следующие результаты такого рода для обыкновенных графов: в [3] эта задача решена для класса $\mathcal{K}(P_3)$; в [4] – для класса $\mathcal{K}(\mathcal{C})$, где $\mathcal{C}$ – множество всех простых циклов.

Цель настоящей работы – охарактеризовать класс графов $\mathcal{K}(P_4)$. Применяется два подхода к описанию этого класса. Один из них – конструктивный: показано, как можно построить графы данного класса с помощью процедуры расширенного подразбиения. Второй подход – стандартное описание наследственного класса запрещёнными подграфами.

Определение 2. Будем называть связный граф G P_4-связным, если его дополнение связно и через каждую его вершину проходит хотя бы один порождённый 4-путь.

Лемма 1. *Граф является кёниговым тогда и только тогда, когда каждый его максимальный по включению P_4-связный подграф кёнигов.*

Операция замены кографом вершины x состоит в следующем: эта вершина удаляется из графа; к графу добавляются несколько новых вершин, и каждая из них соединяется ребром с каждой вершиной, смежной x в исходном графе; новые вершины соединены между собой так, что образуют кограф.

Определение 3. Назовём путь графа висячим, если степень одной из его вершин 1, а остальных – не более 2. Контактной вершиной висячего пути назовём вершину графа, смежную одной из вершин пути, но ему не принадлежащую (если такая имеется, то она единственная).

Операция замены кографом висячего пути из 3 вершин состоит в следующем: вершины этого пути удаляются из графа; к графу добавляется несколько новых вершин, соединённых между собой так, что образуют кограф; новые вершины соединены с контактной вершиной так, чтобы максимальный путь, содержащий контактную и добавленные вершины имел длину 3.

Операция замены кографом висячего пути из 2 вершин состоит в следующем: вершины этого пути удаляются из графа; к графу добавляются вершины $k_1, k_2, \ldots, k_p$, которые соединены попарно между собой и соединены с контактной вершиной; к графу добавляются вершины $l_1, l_2, \ldots, l_{p-1}$ и, быть может, l_p, причём $N(l_i) = \{k_1, k_2, \ldots, k_i\}$; каждую добавленную вершину, а так же контактную вершину, если её степень в исходной графе равна 2, можно заменить кографом произвольной структуры.

Пусть H – двудольный граф. Каждое ребро этого графа, принадлежащее какому-нибудь циклу, подразобьём одной вершиной. Заменим произвольными кографами некоторые вершины степени 1 и 2, при этом если в цикле графа H есть вершина v, смежная с 3 и более вершинами степени больше 1, то вершины 4-класса, содержащего v, не могут быть заменены кографами, а так же если в цикле графа H есть вершина v степени 3 и более, то вершина 4-класса, содержащего v и вершина 4-класса, содержащего вершину, отстоящую на расстоянии 2 от v, не могут быть заменены кографами одновременно. Последним шагом заменим кографами некоторые висячие пути из 2 и 3 вершин. Будем говорить, что результирующий граф получен DQ-преобразованием двудольного графа H.

Обозначим $\mathcal{A}$ множество графов и дополнений графов, полученных из цикла длины кратной 4 добавлением двух вершин, не смежных между собой, каждая из которых соединяется ребром с одной вершиной цикла, причём расстояние между добавленными вершинами нечётно.

Обозначим $\mathcal{B}$ множество графов и дополнений графов, полученных из цикла длины кратной 4 добавлением висячего пути длины 2, смежного с вершиной с номером 0 и заменой кографом из двух вершин вершины цикла с номером $4k, k \in \mathbb{N}$, а так же полученных из цикла длины кратной 4 добавлением вершины, смежной с вершиной с номером 0 и заменой кографами из двух вершин вершин цикла с номерами $4k, k \in \mathbb{N}$ и $4l+2, l \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Обозначим $\mathcal{C}$ множество циклов и их дополнений с числом вершин не менее 5 и не кратным 4.

Обозначим $\mathcal{D}$ множество графов и дополнений графов, полученных из цикла длины $k_1 + k_2 + k_3 + k_4$ заменой кографами из двух вершин вершин с номерами $0, k_1, k_1+k_2, k_1+k_2+k_3$, причём $k_1 \equiv k_2 \equiv k_3 \equiv k_4 \equiv 1 \pmod 4, k_i \geq 5, i = 2,3,4$ или $k_1 \equiv 1 \pmod 4, k_1 \geq 5, k_2 \equiv k_4 \equiv 2 \pmod 4, k_3 \equiv 3 \pmod 4$.

Обозначим $\mathcal{E}$ множество минимальных запрещённых графов из 6 и 7 вершин, не входящих в $\mathcal{A} \cup \mathcal{C}$. Таких графов ровно 64.

Теорема 1. *P_4-связный граф является кёниговым тогда и только тогда, когда может быть получен DQ-преобразованием двудольного графа и не содержит порождённых подграфов из множества $\mathcal{D}$.*

Теорема 2. *Графы множества $\mathcal{A} \cup \mathcal{B} \cup \mathcal{C} \cup \mathcal{D} \cup \mathcal{E}$ составляют множество минимальных запрещённых графов для класса $\mathcal{K}(P_4)$.*

Работа выполнена при финансовой поддержке лаборатории ЛАТАС, НИУ ВШЭ (грант правительства ag. 11.G34.31.0057; РФФИ, проект № 14-01-00515-а).

Литература

1. Hell P. *Graph packing* // Electronic Notes in Discrete Mathematics. 2000. V. 5. P. 170–173.

2. Yuster R. *Combinatorial and computational aspects of graph packing and graph decomposition* // Computer Science Review. 2007. V. 1. P. 12–26.

3. Алексеев В. Е., Мокеев Д. Б. *Кёниговы графы относительно 3-пути* // Дискретный анализ и исследование операций. 2012. № 19 (4). С. 3–14.

4. Ding G., Xu Z., Zang W. *Packing cycles in graphs, II* // J. Comb. Theory. B,. 2003. V. 87. P. 244–253.