О МНОГООБРАЗИЯХ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ СВОБОДНЫХ АБЕЛЕВЫХ ГРУПП

А.А. Шаромет

Белгосуниверситет, механико-математический факультет
Независимости 4, 220050 Минск, Беларусь sharomet@mail.ru

Для многообразия $\mathcal{M} \subseteq M_n = M_n(P)$ определим многообразие перестановочных матриц

$$C(m, \mathcal{M}) = \{(a_1, \dots, a_m) \in \mathcal{M} | a_i a_j = a_j a_i, i, j = \overline{1, m}\},$$

которое можно интерпретировать как многообразие представлений свободной абелевой группы ранга m [1,2]. Обычно $\mathcal{M}$ — это M_n или линейная алгебраическая группа.

В качестве основной задачи рассматривается доказательство неприводимости многообразия $C(m, \mathcal{M})$ или описание его неприводимых компонент. Большое количество работ посвящено изучению многообразий $C(m, \mathrm{M}_n)$. Чтобы воспользоваться этими результатами для многообразий $C(m, \mathrm{GL}_n)$ и $C(m, \mathrm{SL}_n)$, рассмотрим взаимосязи между неприводимостью коммутаторных многообразий $C(m, n)$, $C(m, \mathrm{GL}_n)$ и $C(m, \mathrm{SL}_n)$

Нетрудно убедиться, что $C(m, \mathrm{GL}_n)$ является открытым плотным множеством в $C(m, \mathrm{M}_n)$ и, значит они неприводимы одновременно.

Что касается многообразий $C(m, \mathrm{GL}_n)$ и $C(m, \mathrm{SL}_n)$, то их одновременная неприводимость следует из следующего более общего результата.

Теорема 1. *Пусть $G = TH$ – почти прямое произведение одномерного тора T и (связной) редуктивной группы H. Тогда многообразие $C(m, H)$ неприводимо тогда и только тогда, когда неприводимо многообразие $C(m, G)$.*

Отметим последние результаты о неприводимости многообразий $C(m, \mathrm{M}_n)$, не претендуя на полноту обзора. Первый результат, состоящий в доказательстве неприводимости многообразия $C(2, M_n)$, содержится в известной работе [3]. Хорошо известно, что при $m, n \geq 4$ многообразие $C(m, n)$ приводимо, а при $n = 3$ неприводимо при любом m. Значительное количество работ касается неприводимости $C(3, n)$; так, в работе [4] доказано, что $C(3, n)$ приводимо для $n \geq 32$. Авторы [5] заметили, что из рассуждений Гуральника в [4] легко следует, что $C(3, n)$ приводимо для $n \geq 29$. Наконец, в работе [6] доказано, что $C(3, n)$ неприводимо при $n \leq 10$ в предположении, что характеристика поля нулевая. Вопрос о неприводимости $C(3, n)$ при $10 < n < 29$ пока остается открытым.

Эти результаты, как показано выше, влекут за собой соответствующие следствия для односвязной группы SL_n, которые мы соберем в следующее предложение. Поскольку в большинстве указанных работ характеристика основного поля предполагается нулевой, то и мы сохраним это ограничение.

Предложение. *Многообразие $C(m, \mathrm{SL}_n)$ над полем нулевой характеристики неприводимо в случаях $1 - 3$ и приводимо в случаях $4, 5$.*

1. *$m = 2$, а n – любое;*
2. *$n = 3$, а m – любое;*
3. *$m = 3, n \leq 10$;*
4. *$m \geq 4, n \geq 4$;*
5. *$m = 3, n \geq 29$.*

Все сказанное выше можно считать развернутой мотивировкой задачи описания зависимости неприводимости многообразия $C(m, G)$ от параметра m и ранга группы G для односвязной группы.

В работе [7] доказано, что для неодносвязной группы G многообразие $C(m, G)$ не является неприводимым для $m \geq 2$, что вместе с теоремой Ричардсона [8] показывает, что над полем комплексных чисел односвязность группы G является необходимым и достаточным условием неприводимости многообразия $C(2, G)$. Для неодносвязной группы G остается найти неприводимые компоненты для $C(m, G)$. Если ограничиться случаем $m = 2$, то естественными кандидатами на роль неприводимых компонент в $C(2, G)$ являются $p(W(\tilde{G}, \gamma))$, где $\pi : \tilde{G} \to G$ — универсальное накрытие, $p : \tilde{G} \times \tilde{G} \to G \times G$ — его квадрат, а γ — элемент фундаментальной группы.

Таким образом, для неприводимости множеств $\theta^{-1}(\gamma)$ достаточно убедиться в неприводимости подмножества $p(W(\tilde{G}, \gamma))$, в частности, достаточно доказать неприводимость $W(\tilde{G}, \gamma)$. Единственный известный нам результат, касающийся неприводимости многообразия $W(\tilde{G}, \gamma)$ для односвязной группы, содержится в [5], и состоит в том, что многообразие

$$W(\mathrm{SL}_n, \varepsilon) = \{(a, b) \in \mathrm{SL}_n^2 | [a, b] = \varepsilon E\}$$

неприводимо, если ε – примитивный корень из единицы степени n. Отметим, что это решает задачу описания неприводимых компонент в многообразиях $C(2, G)$ для групп типа A_n, если $n + 1$ – простое число.

Опишем неприводимые компоненты многообразия $C(2, G)$ для групп типа A_n в общем случае. Через $\mathcal{C}_d$ будем обозначать группу всех корней из 1 степени d. Основным результатом является следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть G алгебраическая группа типа A_n, а $\pi : \mathrm{SL}_{n+1} \to G$ – универсальное накрытие, а $F = \{\zeta E | \zeta \in \mathcal{C}_d\}$ – фундаментальная группа. Тогда неприводимыми компонентами для $C(2, G)$ являются множества $p(W(\mathrm{SL}_n, \zeta))$, где $\zeta \in \mathcal{C}_d$.*

Литература

1. Lubotzky A., Magid A. *Varieties of representations of finitely generated groups* // Memoirs of the American Mathematical Society. 1985. V. 58. P. 1–116.

2. Платонов В. П., Рапинчук А. С. *Алгебраические группы и теория чисел.* М.: Наука, 1991.

3. Motskin T., Taussky O. *Pairs of matrices with property L. II* // Trans. Amer. Math. Soc. 1955. V. 80. P. 387–401.

4. Guralnick R. *A note on commuting pairs of matrices*// Linear and Multilinear Algebra. 1992. V. 31. P. 71–75.

5. Rapinchuk A. S., Benyash-Krivetz V. V., Chernousov V. I. *Representation varietes of the fundamental grjups of cjmpact orientable surfases* // Izrael J.of Math. 1996. V. 93, P. 29–71.

6. Šivic K. *On varieties of commuting triples* // Linear Algebra and its Applications. 2012. V. 437. P. 393–460.

7. Шаромет А. А. *О многообразии пар перестановочных матриц неодносвязной алгебраической группы* // XI Белорусская математическая конференция: Тезисы докладов. Минск: Институт математики НАН Беларуси, 2012. Ч.5. С. 57–58.

8. Richardson R. W. *Commuting varieties of semisimple Lie algebras and algebraic groups* // Compositio Math. 1979. V. 38, No. 3. P. 311–327.