О ПЕРЕСЕЧЕНИЯХ АБЕЛЕВОЙ И НИЛЬПОТЕНТНОЙ ПОДГРУПП В КОНЕЧНЫХ ГРУППАХ

В.И. Зенков[1]

[1]Институт математики и механики УрО РАН
С.Ковалевской 16, 620990 Екатеринбург, Россия
v1i9z52@mail.ru

Пусть G — конечная группа, A — абелева подгруппа и B — нильпотентная подгруппа из G. Ранее автором [1, теорема 1] было доказано, что для любых абелевых подгрупп A и B из G минимальные по включению пересечения вида $A\bigcap B^g$, где $g \in G$, лежат в $F(G)$, где $F(G)$ — подгруппа Фиттинга группы G. Но уже пример симметрической группы $G = S_4$, где A — абелева подгруппа порядка 4, не лежащая в $F(G)$, а $B \in \mathrm{Syl}_2(G)$, показывает, что минимальные по включению пересечения вида $A\bigcap B^g$ лежат в $F(G)$, а если рассмотреть минимальные по включению пересечения вида $B\bigcap A^g$, то не все они лежат в $F(G)$. Этот пример показывает, что для рассмотрения минимальных по включению пересечений абелевой и нильпотентной подгрупп важен порядок, в котором записаны подгруппы. Но существует более сложный пример (см. пример 5) группы G, в котором даже в случае записи минимальных по включению пересечений в виде $A\bigcap B^g$ не все они лежат в $F(G)$. Однако во всех указанных примерах существует некоторое минимальное по включению пересечение вида $A\bigcap B^g$, которое лежит в $F(G)$. Как показывает следующая теорема, это явление имеет место в любой разрешимой конечной группе.

Теорема. *Пусть G — разрешимая конечная группа, A — абелева и B — нильпотентная подгруппы из G. Тогда в группе G существует элемент g такой, что $A\bigcap B^g \le F(G)$.*

Пример 1. $G = E_9 \leftthreetimes D_8$ с точным действием D_8 на E_9. Пример показывает, что ослабить условие абелевости группы A в теореме до нильпотентности невозможно с сохранением заключения, так как при $A = B \simeq D_8$ имеем $A\bigcap B^g \ne 1$ для любого элемента g из G.

Пример 2. $G = \mathrm{Aut}(L_3(2))$. В этой группе при $A = B \in \mathrm{Syl}_2(G)$ имеем $A\bigcap B^g \ne 1$ для любого элемента g из G. Таким образом, и в неразрешимых группах условие абелевости A нельзя ослабить до нильпотентности с сохранением заключения теоремы.

Покажем, что условие нильпотентности подгруппы B также невозможно ослабить до сверхразрешимости с сохранением заключения теоремы.

Пример 3. Группа $G = S_3$ сверхразрешима. Пусть $A \simeq S_2 \in \mathrm{Syl}_2(G),\ B = G$. Тогда $A\bigcap B^g = A \not\le F(G)$ для любого элемента g из G.

Пример 4. $G = A_5,\ A \in \mathrm{Syl}_2(G),\ B \simeq Z_5 \leftthreetimes Z_2$. Тогда $A\bigcap B^g \ne 1$ для любого элемента g из G.

Эти примеры показывают, что условия, наложенные в теореме на подгруппы A и B невозможно существенно ослабить как в разрешимом, так и в неразрешимом случае с сохранением заключения теоремы.

Следующий пример показывает, что в некоторых случаях, рассматриваемых в условиях теоремы, для абелевой подгруппы A существует подгруппа B^g такая, что $A\bigcap B^g \ne 1$ — минимальное по включению пересечение и $A\bigcap B^g \not\le F(G)$.

Пример 5. $G = Z_2 \times S_4$. В этой группе $Z(G) = Z_2,\ O_2(G) \simeq E_8$. Силовская 2-подгруппа T из G равна $Z(G) \times S$, где $S \simeq D_8$ и $Z(T) \simeq E_4$. Пусть x — элемент порядка 4 из S, а z — инволюция из $Z(G)$. Тогда xz — элемент порядка 4 такой, что $\langle (xz)^2\rangle = \langle x^2\rangle = Z(S)$ и для инволюции i, для которой $S = \langle x, i\rangle$, имеем $(xz)^i = x^i z^i = x^{-1}z^{-1} = (xz)^{-1}$. Поэтому $\langle xz, i\rangle \simeq \langle x, i\rangle \simeq D_8$ и $\langle xz, i\rangle \bigcap \langle x, i\rangle = \langle i, x^2\rangle \simeq E_4$. Следовательно, если взять подгруппу $A = \langle i, x^2 z\rangle \simeq E_4$ и $S_1 = \langle xz, i\rangle$, то $A\bigcap S_1 = \langle i\rangle \not\le O_2(G)$ и $A\bigcap O_2(G) = \langle x^2 z\rangle$. Если положить $B = S_1 = \langle xz, i\rangle \simeq D_8$, то $S_1 \bigcap O_2(G) = \langle x^2, xzi\rangle \simeq E_4$. Таким образом, инволюция x^2 из S_1 лежит в $G' \simeq A_4$, а инволюции xzi и x^3zi из S_1 лежат в $O_2(G)\backslash G'$. В $O_2(G)$ семь инволюций, причем на трех инволюциях из $O_2(G)\bigcap G'$, являющихся центрами подгрупп S_1, S_1^f и $S_1^{f^2}$, элемент f порядка три из G действует транзитивно, централизуя инволюцию z из $Z(G)$. Следовательно, элемент f действует транзитивно на трех инволюциях из $O_2(G)$, лежащих вне $Z(G)$ и вне G', а также на множестве неупорядоченных пар, составленных из таких инволюций, которых также три. Поэтому пара инволюций $\{xz_i, x^3z_i\}$ из $S_1\backslash G'$ не содержит третью инволюцию x^2z из $O_2(G)\backslash G'$. Но при сопряжении элементом f, а затем f^2 инволюция x^2z будет содержаться в парах инволюций, соответствующих подгруппам S_1^f и $S_1^{f^2}$. Так как $S_1\bigcap S_1^f = O_2(G')$, то $A\bigcap S_1^f = \langle x^2z\rangle = A\bigcap S_1^{f^2}$. Таким образом, $m = \{\langle x^2z\rangle, \langle i\rangle\} = M$, причем одно минимальное пересечение $\langle x^2z\rangle$ лежит в $F(G)$, а второе $\langle i\rangle$ не лежит в $F(G)$.

Работа выполнена за счет гранта Российского научного фонда (проект 15-11-10025).

Литература

1. Зенков В. И. *Пересечение абелевых подгрупп в конечных группах* // Мат. заметки. 1994. Т. 56. № 1–2. С. 150–152.