

ТЕХНИЧЕСКИЕ НАУКИ

УДК 539

М. А. ЖУРАВКОВ, С. С. ЩЕРБАКОВ

НЕКОТОРЫЕ ПОДХОДЫ К МОДЕЛИРОВАНИЮ КОНТАКТНОГО
ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ДВИЖУЩИХСЯ ДЕФОРМИРУЕМЫХ ТЕЛ

(Представлено академиком С. В. Абламейко)

Белорусский государственный университет, Минск

Поступило 08.08.2011

Введение. Среди современных задач механики деформируемого твердого тела одной из важных является построение механико-математических моделей напряженно-деформированного состояния систем, в которых одновременно реализуется контактное взаимодействие с трением (качения, скольжения) между твердыми деформируемыми телами и неконтактное (объемное) деформирование по крайней мере одного из элементов системы [1–5]. Характерными примерами подобных систем являются системы ролик/вал, ролик/кольцо, труба/поток вязкой жидкости. Эти системы представляют собой модели таких практически важных систем, как зубчатые зацепления, колесо/рельс, участок магистрального трубопровода и др.

Исследование данных систем в рамках теории упругости имеет ряд особенностей. Поскольку, как правило, реализуется трехмерное контактное взаимодействие, постановка задачи определения объединенного напряженно-деформированного состояния также является трехмерной.

В теории упругости принимается положение о независимости различных приложенных к твердому телу граничных условий. Однако в результате экспериментальных исследований установлено, что при упругом деформировании элементов сложных механических систем наблюдается изменение характеристик трения (момента, силы коэффициента трения) вследствие изгиба одного из контактирующих элементов, что свидетельствует об изменении условий контактного взаимодействия. Таким образом, при механико-математическом моделировании таких систем следует учитывать изменение контактных граничных условий в результате действия неконтактных нагрузок. Особую сложность представляют задачи моделирования взаимодействия во многокомпонентных трибофатических системах.

Движение системы n тел и граничные условия. В качестве трибофатической системы обычно рассматривается пара элементов (ролик/вал, ролик/кольцо, труба/поток жидкости и т. д.), в которой по крайней мере один из них подвержен действию как контактной, так и неконтактной нагрузок [1–5]. Рассмотрим систему, состоящую из более чем двух элементов [2–8], и изучим общий случай взаимодействия n тел.

Движение каждого из n тел может быть описано следующим образом [9]:

$$\mathbf{r}^k = \Xi^k(\mathbf{R}^k, t), \quad k = 1, \dots, n, \quad (1)$$

где \mathbf{r}^k и \mathbf{R}^k – векторы, определяющие положение частицы k -го тела в пространственной (эйлеровой) и связанной с телом (лагранжевой) системах координат; t – время; Ξ^k – отображение, связывающее

начальную (недеформированную) для момента времени t_0 и текущую (деформированную) конфигурации k -го тела для момента времени t .

Тогда выражения для перемещений, скоростей и ускорений примут вид

$$\begin{aligned}\mathbf{u}^k &= \mathbf{r}_0^k + \mathbf{r}^k - \mathbf{R}^k(t_0) \quad \text{или} \quad \mathbf{u}^k(\mathbf{R}^k, t) = \mathbf{r}_0^k(\mathbf{R}^k, t) + \mathbf{r}^k(\mathbf{R}^k, t) - \mathbf{r}_0^k(\mathbf{R}^k, t_0), \\ \dot{\mathbf{u}}_i^k &\equiv \partial \mathbf{u}_i^k / \partial t, \\ \ddot{\mathbf{u}}_i^k &\equiv \partial^2 \mathbf{u}_i^k / \partial t^2 = \partial \dot{\mathbf{u}}_i^k / \partial t,\end{aligned}$$

где \mathbf{r}_0^k – вектор, определяющий положение начала лагранжевой системы координат относительно начала эйлеровой. По сути, вектор \mathbf{r}_0^k определяет движение тела без учета его деформирования.

Рассмотрим теперь задачу определения напряженно-деформированного состояния каждого из тела системы.

Для некоторой конфигурации k -го тела, заданной его положением в пространстве \mathbf{r}^k в некоторый момент t , соотношения, определяющие механическое состояние частицы (элементарного объема) тела, имеют вид [9–11]:

уравнение неразрывности

$$\dot{\rho}^k + (\rho^k \dot{u}_i^k)_{,i} = 0, \quad i = 1, 2, 3; \quad (2)$$

уравнения движения частиц тела

$$\sigma_{ij,j}^k + \rho^k f_i^k = \rho^k \ddot{u}_i^k, \quad i, j, k = 1, 2, 3; \quad (3)$$

зависимость между перемещениями и деформациями

$$\varepsilon_{ij}^k = \frac{1}{2}(u_{i,j}^k + u_{j,i}^k), \quad (4)$$

зависимости между напряжениями и деформациями

$$\sigma_{ij}^k = \sigma_{ij}^k(\varepsilon_{pq}^k), \quad p, q = 1, 2, 3. \quad (5)$$

К данным уравнениям добавляются граничные условия первого типа, т. е. если заданы перемещения $\bar{u}_i^{k*}(\mathbf{r}^k)$ на поверхности S_u упругого тела

$$u_i^k = \bar{u}_i^{k*}(\mathbf{r}^k, t) \quad (6)$$

и/или второго типа, если на поверхности тела S_σ задано распределение усилий \bar{p}_i

$$\sigma_{ij}^k l_j^k = \bar{p}_i^k(\mathbf{r}^k, t), \quad (7)$$

где l_j^k – направляющие косинусы.

Помимо этого могут быть заданы начальные условия

$$u_i^k \Big|_{t=0} = u_i^{k0}, \quad (8)$$

$$\dot{u}_i^k \Big|_{t=0} = \dot{u}_i^{k0}. \quad (9)$$

Взаимодействие n движущихся деформируемых тел можно описать с помощью контактных граничных условий, определяемых следующими соотношениями:

$$\bar{\mathbf{u}}_l(\mathbf{r}^l, t) \Big|_{S_u^{(lm)}} + \bar{\mathbf{u}}_m(\mathbf{r}^m, t) \Big|_{S_u^{(lm)}} = \mathbf{f}_{lm}^{(\delta)}(\mathbf{r}^l, \mathbf{r}^m, t) \Big|_{S_u^{(lm)}} - \left(\mathbf{r}^l(t) \Big|_{S_u^{(lm)}} + \mathbf{r}^m(t) \Big|_{S_u^{(lm)}} \right), \quad (10)$$

$$\mathbf{L}_\sigma \left(\bar{\mathbf{u}}_l \Big|_{S_\sigma^{(lm)}} \right) - \mathbf{L}_\sigma \left(\bar{\mathbf{u}}_m \Big|_{S_\sigma^{(lm)}} \right) = \bar{\mathbf{p}}_l (\mathbf{r}^l, t) \Big|_{S_\sigma^{(lm)}} + \bar{\mathbf{p}}_m (\mathbf{r}^m, t) \Big|_{S_\sigma^{(lm)}} = 0, \quad (11)$$

где $S^{(lm)}$ – поверхность контакта тел l и m ; $S_\sigma^{(lm)} \subset S^{(lm)}$, $S_u^{(lm)} \subset S^{(lm)}$, $\bar{\mathbf{p}}_k = \{\bar{p}_1^k, \bar{p}_2^k, \bar{p}_3^k\} = \{p_n^k, p_\tau^k\}$ и $\bar{\mathbf{u}}_k = \{\bar{u}_1^k, \bar{u}_2^k, \bar{u}_3^k\}$ – векторы усилий и перемещений на поверхности k -го тела; p_n^k и p_τ^k – нормальная и касательная компоненты вектора усилий; $\mathbf{f}_{lm}^{(\delta)}$ – вектор сближения двух тел; $\bar{\mathbf{L}}_\sigma = \{L_{11}, L_{12}, L_{13}\}$ – вектор, компонентами которого являются интегральные операторы, определяющие поверхностные усилия. Так, в упругой постановке данные операторы имеют следующий вид:

$$L_{ij}(\mathbf{u}) = \mu(u_{i,j} + u_{j,i}) + \lambda u_{q,q} \delta_{ij}, \quad (12)$$

где δ_{ij} – дельта Кронекера; μ и λ – постоянные Ламе.

Если между телами l и m реализуется случай неконформного контактного взаимодействия, то контактная поверхность $S^{(lm)}$ является изначально неизвестной. В этом случае размеры и формы областей контакта, а также распределение контактных усилий можно найти, воспользовавшись вариационными методами или методом обращения матрицы [12].

Система разрешающих уравнений для нескольких тел. Решение задачи (1)–(11), описывающей взаимодействие упругих твердотельных элементов системы и их механические состояния, строим в виде системы интегральных уравнений, воспользовавшись подходами к их формированию, описанными в [6–14].

Предполагая, что в случае упругого деформирования реакция каждой частицы тела на изменение внешнего нагружения во времени является мгновенной, рассматриваем квазистатическую задачу взаимодействия n тел в некоторый момент времени.

Воспользуемся фундаментальным решением задачи Кельвина для пространства [14] в случае действия сосредоточенной нормальной (верхний индекс n) и касательной к некоторой плоскости в пространстве сил (верхний индекс τ) в перемещениях

$$u_i^{(n)}, u_i^{(\tau)} \quad (13)$$

и напряжениях

$$\sigma_{ij}^{(n)}, \sigma_{ij}^{(\tau)}, \quad (14)$$

для которых

$$G_{ij}^{(n,\sigma)}, G_{ij}^{(\tau,\sigma)}, G_i^{(n,u)}, G_i^{(\tau,u)} \quad (15)$$

представляют собой соответствующие функции влияния. Запятая между индексами внутри скобок в (15) и в дальнейшем не означает дифференцирования по следующему за ней индексу.

Суперпозиция решений (13), (14) позволяет решать задачу для любого распределения усилий в пространстве или по полупространству. Условие нулевых перемещений и напряжений на бесконечности выполняются автоматически, поскольку они выполняются для решений о действии сосредоточенной силы (13), (14).

Напряженно-деформированное состояние в точке $M(x_1, x_2, x_3)$ пространства может быть определено из следующих соотношений для поверхностных и объемных сил:

$$u_i = L_i^{(S,u)}(p_n) + L_i^{(S,u)}(p_\tau) + L_i^{(V,u)}(\mathbf{t}), \quad (16)$$

$$\sigma_{ij} = L_{ij}(\mathbf{u}), \quad (17)$$

где \mathbf{t} – вектор объемных сил во внутренней точке тела, а операторы L_i^S и L_i^V имеют вид

$$L_i^{(S,j)}(p_\varphi) = \iint_{S(\xi_1, \xi_2)} p_\varphi(\xi_1, \xi_2) G_i^{(\varphi,j)}(\xi_1 - x_1, \xi_2 - x_2, x_3) d\xi_1 d\xi_2 = \int_{S(\xi)} p_\varphi(\xi) G_i^{(\varphi,j)}(\xi, \mathbf{x}) dS(\xi), \quad (18)$$

$$L_i^{(V,j)}(p_\varphi) = \iiint_{V(\xi_1, \xi_2, \xi_3)} p_\varphi(\xi_1, \xi_2, \xi_3) G_i^{(\varphi,j)}(\xi_1 - x_1, \xi_2 - x_2, \xi_3 - x_3) d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3 = \int_{V(\xi)} p_\varphi(\xi) G_i^{(\varphi,j)}(\xi, \mathbf{x}) dV(\xi). \quad (19)$$

где $j = u, \sigma$; $\varphi = n, \tau$.

Для однородного изотропного упруго деформируемого твердого тела выражения (17) можно записать в виде суперпозиции напряженных состояний следующим образом:

$$\sigma_{ij} = L_{ij}^{(S,\sigma)}(p_n) + L_{ij}^{(S,\sigma)}(p_\tau) + L_{ij}^{(V,\sigma)}(\mathbf{t}). \quad (20)$$

Рассмотрим теперь случаи, когда нагружаемый объект имеет форму, отличную от полупространства, а граничные условия заданы в перемещениях в соответствии с (6).

Обозначим граничные условия второго рода верхним индексом r :

$$\begin{aligned} \sigma_{nn} \Big|_{S_\sigma} &= p_n^{(r)}(S_\sigma) = p_n^{(S)}(S_\sigma) + p_n^{(lm)}(S_\sigma^{(lm)}), \\ \sigma_{n\tau} \Big|_{S_\sigma} &= p_\tau^{(r)}(S_\sigma) = p_\tau^{(S)}(S_\sigma) + p_\tau^{(lm)}(S_\sigma^{(lm)}). \end{aligned} \quad (21)$$

В случае задания граничных условий первого рода или сложных геометрических характеристик взаимодействующих тел необходимо также определить так называемые фиктивные условия на границах тела [1], которые будем обозначать верхним индексом f ,

$$\sigma_{nn} \Big|_{S_\sigma} = p_n^{(f)}(S_\sigma), \quad \sigma_{n\tau} \Big|_{S_\sigma} = p_\tau^{(f)}(S_\sigma), \quad (22)$$

таким образом, чтобы одновременно выполнялись граничные условия (6) и (7) на поверхности тела S :

$$\begin{aligned} \bar{u}_i &= L_i^{(S,u)}(p_n^{(r)}) + L_i^{(S,u)}(p_n^{(f)}) + \\ &L_i^{(S,u)}(p_\tau^{(r)}) + L_i^{(S,u)}(p_\tau^{(f)}) + L_i^{(V,u)}(\mathbf{t}), \\ \bar{\sigma}_{ij}(dS) &= L_{ij}(\bar{\mathbf{u}}). \end{aligned} \quad (23)$$

Уравнения (23) позволяют определить неизвестные фиктивные граничные условия $p^{(f)}$ и $q^{(f)}$.

Тогда напряжено-деформированное состояние твердого тела сложной формы в точке $M(x_1, x_2, x_3)$ может быть определено для граничных условий следующего вида:

$$p_q = p_q^{(r)} + p_q^{(f)} = p_q^{(S)} + p_q^{(lm)} + p_q^{(f)}, \quad q = n, \tau, \quad (24)$$

так что соотношения (16) и (17) примут вид

$$u_i^l = L_u^{(S,i)} \left(p_n^{(S,l)} + \sum_m p_n^{(lm)} + p_n^{(f,l)} \right) + L_u^{(S,i)} \left(p_\tau^{(S,l)} + \sum_m p_\tau^{(lm)} + p_\tau^{(f,l)} \right) + L_u^{(V,i)}(\mathbf{t}_l), \quad (25)$$

$$\sigma_{ij}^l = L_{ij}(\mathbf{u}). \quad (26)$$

В силу линейности интегральных операторов L выражение (25) представимо в следующем виде:

$$\begin{aligned}
u_i^l &= L_i^{(S,u)}(p_n^{(S,l)}) + L_i^{(S,u)}\left(\sum_m p_n^{(lm)}\right) + L_i^{(S,u)}(p_n^{(f,l)}) + \\
&L_i^{(S,u)}(p_\tau^{(S,l)}) + L_i^{(S,u)}\left(\sum_m p_\tau^{(lm)}\right) + L_i^{(S,u)}(p_\tau^{(f,l)}) + L_i^{(V,u)}(\mathbf{t}_l)
\end{aligned} \tag{27}$$

или

$$\begin{aligned}
u_i^l &= \int_{S(\xi)} p_n^{(S,l)}(\xi) G_{ij}^{(u,n)}(\xi, \mathbf{x}) dS(\xi) + \sum_m \int_{S(\xi)} p_n^{(lm)}(\xi) G_{ij}^{(u,n)}(\xi, \mathbf{x}) dS(\xi) + \int_{S(\xi)} p_n^{(f,l)}(\xi) G_{ij}^{(u,n)}(\xi, \mathbf{x}) dS(\xi) + \\
&\int_{S(\xi)} p_\tau^{(S,l)}(\xi) G_{ij}^{(u,\tau)}(\xi, \mathbf{x}) dS(\xi) + \sum_m \int_{S(\xi)} p_\tau^{(lm)}(\xi) G_{ij}^{(u,\tau)}(\xi, \mathbf{x}) dS(\xi) + \int_{S(\xi)} p_\tau^{(f,l)}(\xi) G_{ij}^{(u,\tau)}(\xi, \mathbf{x}) dS(\xi) + \\
&\int_{V(\xi)} t_l(\xi) G_{ij}^{(u,l)}(\xi, \mathbf{x}) dV(\xi),
\end{aligned} \tag{28}$$

Запишем теперь систему разрешающих уравнений в символической форме для l -го тела:

$$\begin{Bmatrix} \bar{\mathbf{p}}_l^{(S)} \\ \bar{\mathbf{u}}_l^{(S)} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{L}}_\sigma(\mathbf{L}_u^{(S)}) \\ \bar{\mathbf{L}}_u^{(S)} \end{bmatrix} \bar{\mathbf{p}}_l + \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{L}}_\sigma(\mathbf{L}_u^{(V)}) \\ \bar{\mathbf{L}}_u^{(V)} \end{bmatrix} \mathbf{t}_l, \tag{29}$$

где $\mathbf{t}_l = \{t_1^l, t_2^l, t_3^l\}$ – вектор усилий, перемещений на поверхности и объемных сил внутри l -го тела; $\mathbf{L}_u^{(S)} = \{L_1^{(S,u)}, L_2^{(S,u)}, L_3^{(S,u)}\}$ и $\mathbf{L}_u^{(V)} = \{L_1^{(V,u)}, L_2^{(V,u)}, L_3^{(V,u)}\}$ – векторы, компонентами которых являются интегральные операторы для действия поверхностных и объемных сил.

Проиллюстрируем применение, например, вектора $\mathbf{L}_u^{(S)}$ к вектору $\bar{\mathbf{p}}_l$ с помощью следующего примера:

$$\begin{aligned}
\mathbf{L}_u^{(S)}(\bar{\mathbf{p}}) &= \{L_1^{(S,u)}, L_2^{(S,u)}, L_3^{(S,u)}\}(\{\bar{p}_1^l, \bar{p}_2^l, \bar{p}_3^l\}) = \{L_1^{(S,u)}(\bar{p}_1^l) + L_1^{(S,u)}(\bar{p}_2^l) + L_1^{(S,u)}(\bar{p}_3^l), \\
L_2^{(S,u)}(\bar{p}_1^l) + L_2^{(S,u)}(\bar{p}_2^l) + L_2^{(S,u)}(\bar{p}_3^l), L_3^{(S,u)}(\bar{p}_1^l) + L_3^{(S,u)}(\bar{p}_2^l) + L_3^{(S,u)}(\bar{p}_3^l)\} &= \{\bar{u}_1^l, \bar{u}_2^l, \bar{u}_3^l\} = \bar{\mathbf{u}}_l.
\end{aligned} \tag{30}$$

Представим систему (29) в следующей форме:

$$\{\mathbf{C}_l\} = [\mathbf{A}_l] \bar{\mathbf{p}}_l + [\mathbf{B}_l] \mathbf{t}_l, \tag{31}$$

где \mathbf{A}_{lm} , \mathbf{B}_{lm} и \mathbf{C}_l , \mathbf{A}_l , \mathbf{B}_l – краткие обозначения элементов и групп элементов в системе (29).

С учетом контактного взаимодействия между l -м и m -м телами, система разрешающих уравнений для поверхностей двух тел примет вид:

$$\begin{Bmatrix} \bar{\mathbf{p}}_l^{(S)} \\ \bar{\mathbf{u}}_l^{(S)} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{f}_{lm}^{(S)} \\ \bar{\mathbf{p}}_m^{(S)} \\ \bar{\mathbf{u}}_m^{(S)} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{L}}_\sigma(\mathbf{L}_u^{(S)}) & 0 \\ \bar{\mathbf{L}}_u^{(S)} & 0 \\ \bar{\mathbf{L}}_\sigma(\mathbf{L}_u^{(S)}) & -\bar{\mathbf{L}}_\sigma(\mathbf{L}_u^{(S)}) \\ \bar{\mathbf{L}}_u^{(S)} & -\bar{\mathbf{L}}_u^{(S)} \\ 0 & \bar{\mathbf{L}}_\sigma(\mathbf{L}_u^{(S)}) \\ 0 & \bar{\mathbf{L}}_u^{(S)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{\mathbf{p}}_l \\ \bar{\mathbf{p}}_m \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{L}}_\sigma(\mathbf{L}_u^{(V)}) & 0 \\ \bar{\mathbf{L}}_u^{(V)} & 0 \\ \bar{\mathbf{L}}_\sigma(\mathbf{L}_u^{(V)}) & -\bar{\mathbf{L}}_\sigma(\mathbf{L}_u^{(V)}) \\ \bar{\mathbf{L}}_u^{(V)} & -\bar{\mathbf{L}}_u^{(V)} \\ 0 & \bar{\mathbf{L}}_\sigma(\mathbf{L}_u^{(V)}) \\ 0 & \bar{\mathbf{L}}_u^{(V)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{t}_l \\ \mathbf{t}_m \end{Bmatrix}. \tag{32}$$

Перепишем систему (32) в более компактной форме

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{C}_l \\ 0 \\ \mathbf{f}_{lm}^{(\delta)} \\ \mathbf{C}_m \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_l & 0 \\ \mathbf{A}_{lm} & -\mathbf{A}_{lm} \\ \bar{\mathbf{L}}_u^{(S)} & -\bar{\mathbf{L}}_u^{(S)} \\ 0 & \mathbf{A}_m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{\mathbf{p}}_l \\ \bar{\mathbf{p}}_m \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{B}_l & 0 \\ \mathbf{B}_{lm} & -\mathbf{B}_{lm} \\ \bar{\mathbf{L}}_u^{(V)} & -\bar{\mathbf{L}}_u^{(V)} \\ 0 & \mathbf{B}_m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{t}_l \\ \mathbf{t}_m \end{Bmatrix}, \quad (33)$$

где $\mathbf{A}_{lm}, \mathbf{B}_{lm}$ – краткие обозначения операторов $\bar{\mathbf{L}}_\sigma(\mathbf{L}_u^{(S)})$ и $\bar{\mathbf{L}}_\sigma(\mathbf{L}_u^{(V)})$.

Решение системы (33) заключается в определении $\bar{\mathbf{p}}_i$:

$$\bar{\mathbf{p}}_i = \bar{\mathbf{p}}_i^{(r)} + \bar{\mathbf{p}}_i^{(f)} = \bar{\mathbf{p}}_i^{(S)} + \bar{\mathbf{p}}_i^{(lm)} + \bar{\mathbf{p}}_i^{(f)}, \quad (34)$$

где $\bar{\mathbf{p}}_i^{(r)} = \bar{\mathbf{p}}_i^{(S)} + \bar{\mathbf{p}}_i^{(lm)}$ – приложенные (контактные и неконтактные) граничные условия в напряжениях; $\bar{\mathbf{p}}_i^{(f)}$ – неизвестные «фиктивные» граничные условия в напряжениях, соответствующие приложенным граничным условиям в перемещениях $\bar{\mathbf{u}}_i^{(S)}$ и $\bar{\mathbf{u}}_{lm}$.

После расчета $\bar{\mathbf{p}}_l$ с помощью (33), напряженно-деформированное состояние в точке $M(x_1, x_2, x_3)$ тела l может быть определено из следующих соотношений для поверхностных и объемных сил:

$$\begin{aligned} u_i^l &= L_i^{(S,u)}(\bar{\mathbf{p}}_l) + L_i^{(V,u)}(\mathbf{t}_l), \\ \sigma_{ij}^l &= L_{ij}(\mathbf{u}_i^l). \end{aligned} \quad (35)$$

Аналогичным способом строится система для более чем двух взаимодействующих тел:

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{C}_1 \\ 0 \\ \mathbf{f}_{12}^{(\delta)} \\ \mathbf{C}_2 \\ 0 \\ \mathbf{f}_{13}^{(\delta)} \\ \mathbf{C}_3 \\ \vdots \\ 0 \\ \mathbf{f}_{2n}^{(\delta)} \\ 0 \\ \mathbf{f}_{3n}^{(\delta)} \\ \mathbf{C}_n \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \mathbf{A}_{12} & -\mathbf{A}_{21} & 0 & & 0 \\ \bar{\mathbf{L}}_u^{(S)} & -\bar{\mathbf{L}}_u^{(S)} & 0 & & 0 \\ 0 & \mathbf{A}_2 & 0 & & 0 \\ \mathbf{A}_{13} & 0 & -\mathbf{A}_{31} & & 0 \\ \bar{\mathbf{L}}_u^{(S)} & 0 & -\bar{\mathbf{L}}_u^{(S)} & & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{A}_3 & & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \mathbf{A}_{2n} & 0 & -\mathbf{A}_{n2} \\ 0 & \bar{\mathbf{L}}_u^{(S)} & 0 & & -\bar{\mathbf{L}}_u^{(S)} \\ 0 & 0 & \mathbf{A}_{3n} & -\mathbf{A}_{n3} & 0 \\ 0 & 0 & \bar{\mathbf{L}}_u^{(S)} & -\bar{\mathbf{L}}_u^{(S)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \mathbf{A}_n \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{\mathbf{p}}_1 \\ \bar{\mathbf{p}}_2 \\ \bar{\mathbf{p}}_3 \\ \vdots \\ \bar{\mathbf{p}}_n \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \mathbf{B}_{12} & -\mathbf{B}_{21} & 0 & & 0 \\ \bar{\mathbf{L}}_u^{(V)} & -\bar{\mathbf{L}}_u^{(V)} & 0 & & 0 \\ 0 & \mathbf{B}_2 & 0 & & 0 \\ \mathbf{B}_{13} & 0 & -\mathbf{B}_{31} & & 0 \\ \bar{\mathbf{L}}_u^{(V)} & 0 & -\bar{\mathbf{L}}_u^{(V)} & & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{A}_3 & & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \mathbf{B}_{2n} & 0 & & -\mathbf{B}_{n2} \\ 0 & \bar{\mathbf{L}}_u^{(V)} & 0 & & -\bar{\mathbf{L}}_u^{(V)} \\ 0 & 0 & \mathbf{B}_{3n} & -\mathbf{B}_{n3} & 0 \\ 0 & 0 & \bar{\mathbf{L}}_u^{(V)} & -\bar{\mathbf{L}}_u^{(V)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \mathbf{B}_n \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{t}_1 \\ \mathbf{t}_2 \\ \mathbf{t}_3 \\ \vdots \\ \mathbf{t}_n \end{Bmatrix}. \quad (36)$$

Система разрешающих уравнений (36) описывает взаимодействия по крайней мере тел 1 с 2, 1 с 3, 2 и 3 с n .

В модели взаимодействия тел (29)–(36) в отличие от моделей зонально-однородных тел, описанных, например, в [10], дополнительно рассматриваются касательные поверхностные усилия p_τ . Это позволяет учитывать вклад силы трения в формирование механического состояния взаимодействующих тел.

Расчет взаимодействия двух тел с учетом объемного деформирования. Рассмотрим пример реализации системы (36) в ее более простом варианте (32) для двух тел применительно к исследованию обратного эффекта. В качестве объекта исследования возьмем систему ролик/вал,

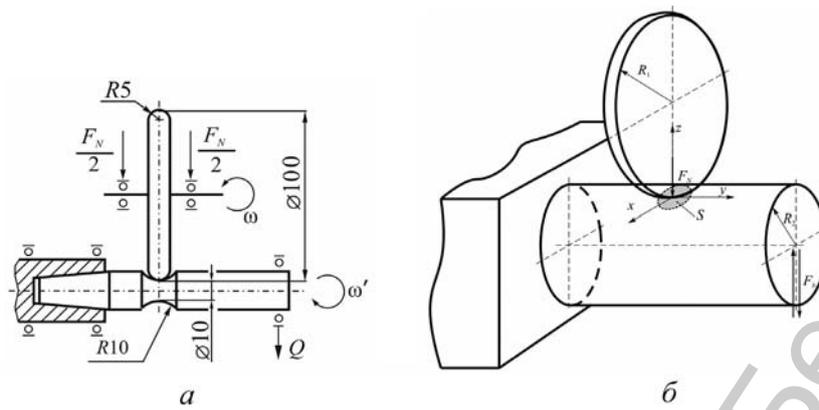


Рис. 1. Схемы износоусталостных испытаний (а), трибофатической системы ролик/вал (б)

на которую действуют контактная F_N и неконтактная F_b силы (рис. 1, а). Данная модель используется, в частности, при износоусталостных испытаниях на контактно-механическую усталость.

Для этой модели будем решать задачу о влиянии величины неконтактной нагрузки на изменение контактного давления.

Из рис. 1, б видно, что поверхности контактирующих тел ограничены поверхностями второго порядка, поэтому для определения контактного давления можно было бы ограничиться теорией Герца. Однако поскольку при решении системы (32) более вероятны случаи контакта тел с поверхностями произвольной формы, предпочтительнее пользоваться при расчете контактного давления более общими методами численного моделирования. В нашем расчете будет использоваться метод обращения матрицы, описание которого можно найти, например, в [12].

Упругие перемещения соответствующих точек двух поверхностей удовлетворяют соотношению

$$\bar{u}_{z1} + \bar{u}_{z1} + [z_1(x, y) - z_2(x, y)] - \delta = \bar{u}_{z1} + \bar{u}_{z1} + h(x, y) - \delta \begin{cases} = 0, (x, y) \in S, \\ > 0, (x, y) \notin S, \end{cases} \quad (37)$$

где δ – сближение контактирующих тел; $z_1(x, y)$ и $z_2(x, y)$ – уравнения поверхностей тел; S – область контакта.

Проведем равномерное разбиение плоской области S на квадратные элементы, на каждый из которых действует подлежащий определению элемент давления постоянной величины p_{ij} . Сформируем матрицу коэффициентов влияния W_{ijpq} , которая определяет перемещение в точке (x_p, y_q) под действием единичного элемента давления с центром в точке (x_i, y_j) :

$$\bar{u}_z^{pq} = -k_E \sum W_{ijpq} p_{ij}, \quad (38)$$

где k_E – коэффициент упругих свойств контактирующих тел.

В свою очередь контактная сила F_N связана с узловыми значениями элементов давления формулой

$$F_N = -k_S \sum_{ij} p_{ij}, \quad (39)$$

где k_S – коэффициент, определяемый формой и размерами элементов давления.

Подставляя (38) в (37), получим

$$\sum_{ij} W_{ijpq} p_{ij} = \frac{1}{k_E} (h_{pq} - \delta). \quad (40)$$

Задавая сближение тел δ , имеем значения неизвестных p_{ij} , умножив обе части уравнения (40) на \mathbf{W}^{-1} .

Если задана контактная нагрузка F_N , а δ неизвестно, то (40) решается совместно с (39).

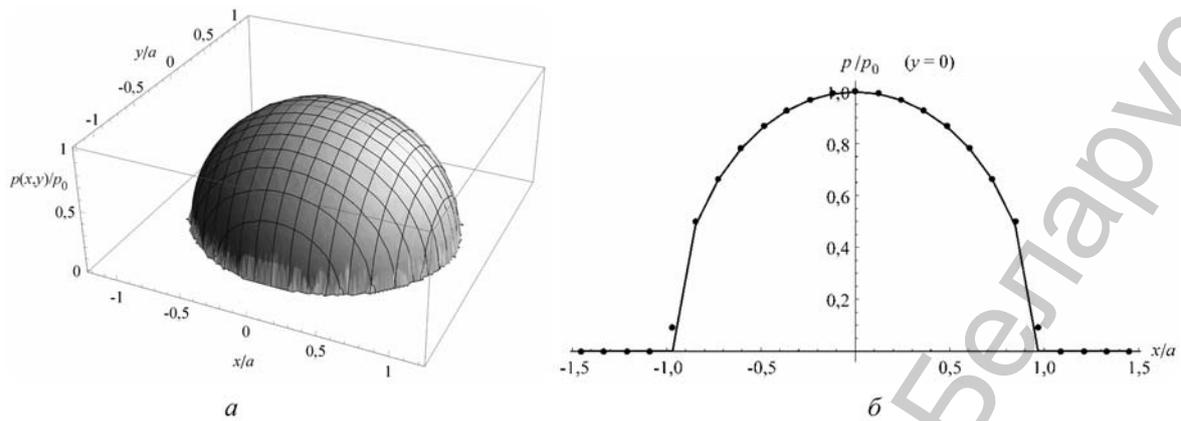


Рис. 2. Распределение контактного давления, отнесенного к $p_0 = 3,844 \cdot 10^9$ Па по области контакта (а), вдоль оси x в сравнении с аналитическим решением (сплошная кривая) (б)

В системе ролик/вал реализуется случай неконформного контакта, поэтому в первом решении системы (40) в окрестности границ контактной области могут появиться точки, где $p_{ij} < 0$. Это означает, что для поддержания контакта на всей расчетной области в таких точках сетки необходимо приложить растягивающие усилия.

Данные элементы разбиения исключаются из предполагаемой области контакта (давления в них полагаются равными нулю) и уравнение (40) решается для обновленной сетки. Описанный процесс повторяется до тех пор, пока на некотором шаге полученные p_{ij} становятся неотрицательными.

Численное моделирование контактного взаимодействия двух тел проводилось при следующих параметрах: $\nu_1 = \nu_2 = 0,3$, $E_1 = E_2 = 2,01 \cdot 10^{11}$ Па, $R_{11} = 0,005$ м, $R_{12} = 0,05$ м, $R_{21} = 0,01$ м, $R_{22} = -0,01$ м (см. рис. 1, б).

Контактная нагрузка задавалась а) силой $F_N = 2000$ Н и б) сближением $\delta = 2,723 \cdot 10^{-5}$ м, соответствующим по теории Герца указанному значению F_N . Соотношение полуосей эллипса контакта $a / b = 0,89$. Размеры расчетной области: $-1,5a \leq x, y \leq 1,5a$, где $a = 5,296 \cdot 10^{-4}$ м. Область разбивалась на 21×21 квадратных элементов.

Полученное в результате итерационного решения системы (40) распределение контактного давления (рис. 2) сравнивали с аналитическим решением по Герцу для распределения эллиптического вида. Погрешности оценивались по следующим формулам:

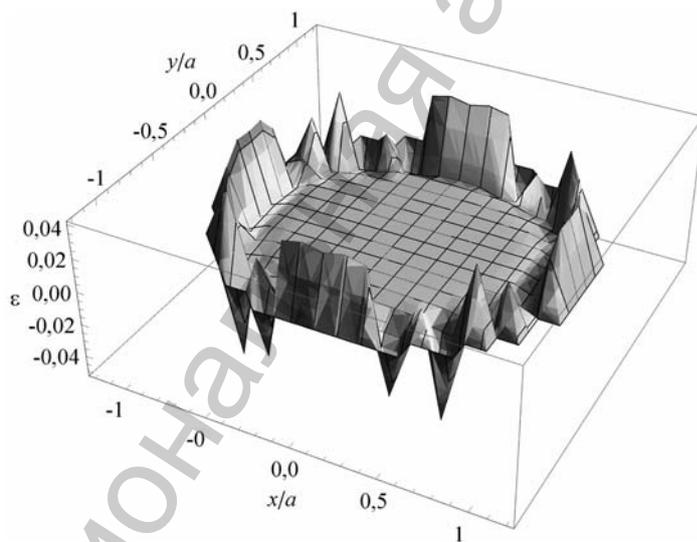


Рис. 3. Распределение погрешности ϵ_i по области несогласованного контакта

$$\epsilon_i = \frac{p_i^H - p_i}{p_0^H}, \quad (41)$$

$$\epsilon_{\max} = \max_i |\epsilon_i|, \quad \epsilon_{\text{avg}} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |\epsilon_i|,$$

где верхний индекс H означает решение по Герцу.

Из рис. 2, б и 3 видно, что при контактной нагрузке, заданной F_N на краях области контакта, погрешность численного моделирования наибольшая. При контактной нагрузке, заданной δ , распределение погрешности практически не отличается от представленного на рис. 3.

Кроме контактной нагрузки, которую будем задавать сближением

$\delta = 2,723 \cdot 10^{-5}$ м, к валу также будем прикладывать растягивающую (сжимающую) или изгибающую нагрузку.

Перемещения области контакта в результате действия F_b имеют вид

$$\bar{u}_z^{(b)} = \int \varepsilon_{xx}^{(b)} dz. \quad (42)$$

Из таблицы видно, что погрешности при контактной нагрузке, заданной F_N , незначительно меньше, чем при заданной δ .

Интегральные показатели погрешности

Вид погрешности	Вид контактного нагружения	
	F_N	δ
ε_{\max}	$4,929 \cdot 10^{-2}$	$5,9 \cdot 10^{-2}$
ε_{avg}	$3,871 \cdot 10^{-3}$	$4 \cdot 10^{-3}$

В системе координат, показанной на рис. 1, б, перемещения (38) при растяжении–сжатии составляют

$$\bar{u}_z^{(b1)} = -\frac{\nu_2}{E_2} \sigma_{xx}^{(b1)} R_2, \quad (43)$$

а при изгибе

$$\bar{u}_z^{(b2)} = -\frac{\nu_2}{2E_2} \sigma_{xx}^{(b2)} R_2. \quad (44)$$

Из рис. 4, а видно, что максимальное контактное давление p_0 , отнесенное к $p_0^{(c)} = 3,844 \cdot 10^9$ Па, в зависимости от неконтактных напряжений в центре области контакта σ_a , отнесенных к $\sigma_a^{(\max)} = 6,4 \cdot 10^8$ Па, изменяется примерно от +17 % до –20 % при растяжении–сжатии и примерно от +9 % до –9 % при изгибе.

Из рис. 4, б следует, что контактная сила F_N , отнесенная к $F_N^{(c)} = 2000$ Н, в зависимости от неконтактных напряжений в центре области контакта σ_a , отнесенных к $\sigma_a^{(\max)} = 6,4 \cdot 10^8$ Па, изменяется примерно от +60 % до –50 % при растяжении–сжатии и примерно от +27 % до –25 % при изгибе.

Из рис. 5 видно, что при испытаниях на контактно-механическую усталость изменение коэффициента сопротивления качению несколько больше в зоне сжатия, чем в зоне растяжения. Это в качественном отношении соответствует результатам приведенных расчетов (см. рис. 4 и 5).

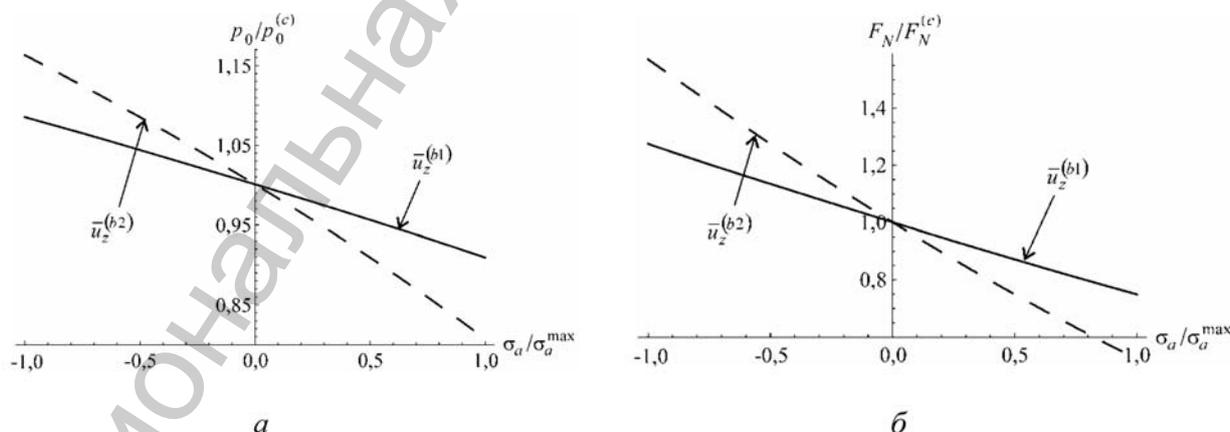


Рис. 4. Зависимость максимального контактного давления (а) и контактной нагрузки (б) от уровня неконтактных напряжений

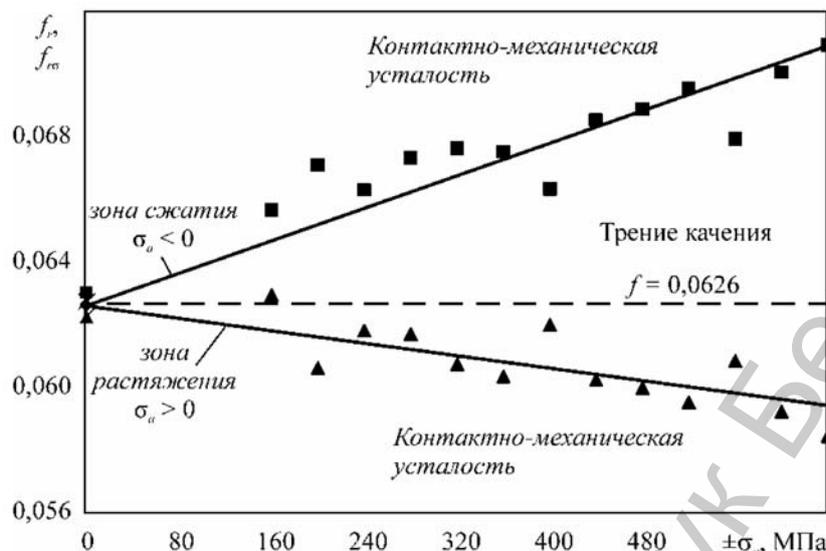


Рис. 5. Экспериментальная зависимость между параметрами трения в системе ролик/вал и неконтактными напряжениями в области контакта ($p_0 = 200 \text{ МПа} = \text{const}$)

Заключение. Постановка задачи (1)–(36) для движущейся и взаимодействующей системы n тел, по сути, представляет собой постановку задачи для обобщенной многокомпонентной системы. Уравнения движения тел, как абсолютно твердых, определяют их взаимное положение и характер взаимодействия с учетом конкретных свойств каждого тела, что позволяет определить для него граничные условия.

Построена система интегральных уравнений (36) для системы твердых тел, к которым приложены смешанные граничные условия. Граничные условия в напряжениях задаются как нормальными к поверхности тела, так и касательными усилиями. Решение уравнений (36) для поверхностей взаимодействующих тел (т. е. определение граничных условий) позволяют применительно к трибофатическим системам [1] моделировать обратный эффект, а решение для внутренней области тела – прямой.

Пример численного моделирования в системе ролик/вал контактного давления методом обращения матрицы (37)–(44) продемонстрировал значительный вклад неконтактных нагрузок в изменение характеристик контактного взаимодействия. Приведено подтверждение этого эффекта результатами эксперимента.

Литература

1. *Sosnovskiy L. A. Tribo-Fatigue. Wear-fatigue Damage and Its Prediction (Foundations of Engineering Mechanics). Springer, 2005*
2. *Журавков М. А., Сосновский Л. А., Щербаков С. С. // X Белорус. матем. конф. Тез. докл. Междунар. науч. конф. Минск, 3–7 ноября 2008 г. Ч. 2. С. 120–121.*
3. *Журавков М. А. // Тр. VI-го Междунар. симпозиума по трибофатике (ISTF 2010), Минск, Беларусь, 25 октября – 1 ноября 2010 г. Т. 1. С. 87–96.*
4. *Витязь П. А., Сосновский Л. А., Щербаков С. С. // Докл. НАН Беларуси. 2009. Т. 53, № 4. С. 102–110.*
5. *Sosnovskiy L. A., Sherbakov S. S. // J. of Sound and Vibration. 2007. Vol. 308. Issues 3–5. P. 489–503*
6. *Журавков М. А., Мартыненко М. Д. Теоретические основы деформационной механики блочно-слоистого массива соляных горных пород. Минск, 1995.*
7. *Щербаков С. С. // Тр. VI-го Междунар. симпозиума по трибофатике (ISTF 2010), Минск, Беларусь, 25 октября – 1 ноября 2010 г. Т. 2. С. 439–446.*
8. *Willis J. R. // Mechanics of Materials. 2009. Vol. 41. Issue 4. P. 385–393.*
9. *Mase G. Theory and Problems of Continuum Mechanics. McGraw-Hill, 1970.*
10. *Banerjee P. K., Butterfield R. Bounadry Element Methods Engineering Science. McGraw-Hill, 1981.*
11. *Журавков М. А. Математическое моделирование деформационных процессов в твердых деформируемых средах (на примере задач механики горных пород и массивов). Минск, 2002.*
12. *Johnson K. L. Contact Mechanics. Cambridge University Press, 1985.*

13. Журавков М. А., Мартыненко М. Д. Сингулярные решения и интегральные уравнения в механике деформируемых сред. Минск, 1999.

14. Журавков М. А. Фундаментальные решения теории упругости и некоторые их применения в геомеханике, механике грунтов и оснований. Минск, 2008.

M. A. ZHURAVKOV, S. S. SHERBAKOV

sherbakovss@mail.ru

**SOME APPROACHES TO MODELING CONTACT INTERACTION
OF MOVING DEFORMABLE BODIES**

Summary

The statement of the problem of determining the mechanical state of the system of n moving solids with various mechanical properties is considered. This statement includes both the motion equations of solids and the set of boundary conditions for each of the solids defined by character of their interaction.

The system of resolving integrated equations is offered for the system of solids which may be applied for determination of normal and tangential tractions at the surface of each body, and also of the stress-strain state of its interior. Solution of a given system allows investigating direct and back effects for a tribo-fatigue system consisting of more than two elements.

The example of calculation of contact pressure change under the influence of non-contact loading in the roller/shaft tribo-fatigue system is given.

Национальная академия наук Беларуси