Обобщенное решение задачи Ламе для плоскости с отверстием в случае произвольно распределенного нормального напряжения, представленного в виде отрезка ряда Фурье на границе отверстия

А. С. Кравчук, А. И. Кравчук (Минск, Беларусь)

Несмотря на то, что задача Ламе для плоскости с круглым отверстием, к которому приложено постоянное давление, имеет большое прикладное значение, обобщение решения данной задачи на случай произвольного распределения напряжений на границе отверстия до настоящего времени не было выполнено.

Для решения поставленной краевой задачи были использованы формулы Колосова-Мусхелишвили, которые в декартовой системе координат имеют вид [1]:

$$\sigma_{xx} + \sigma_{yy} = 2\left(\varphi'(z) + \overline{\varphi'(z)}\right), \tag{1}$$

$$\sigma_{xx} - \sigma_{yy} + 2\imath\sigma_{xy} = 2\left(\overline{z} \cdot \varphi''(z) + \psi'(z)\right), \tag{2}$$

$$2\mu(u + \imath v) = \kappa \cdot \varphi(z) - z \cdot \overline{\varphi'(z)} - \overline{\psi(z)}. \tag{3}$$

где $\varphi(z)$, $\psi(z)$ - аналитические во внешности отверстия радиуса R функции:

$$\varphi(z) = -\frac{V_x + \imath V_y}{2\pi(1+\kappa)}\ln(z) + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{a_k}{z^k}, \psi(z) = \kappa\frac{V_x - \imath V_y}{2\pi(1+\kappa)}\ln(z) + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{b_k}{z^k}, \tag{4}$$

$\mu = \frac{E}{2(1+\nu)}$, E - модуль упругости, ν - коэффициент Пуассона, κ - константа, определяемая видом напряженного состояния [1], (V_x, V_y) - главный вектор приложенных нагрузок, $\imath$ - комплексная единица. Будем предполагать, что $\sigma_{rr}|_{r=R}$ - четная функция относительно θ, тогда

$$\sigma_{rr}|_{r=R} = \frac{A^*}{2} + \sum_{j=1}^{\infty} A_j^* \cdot \cos(j \cdot \theta). \tag{5}$$

Исходя из (1), (2), (4) и (5), можно получить, что все коэффициенты в (4) являются вещественными при решении указанной краевой задачи. Кроме того, можно получить выражение коэффициентов в разложениях (4) через коэффициенты ряда Фурье (5) в следующем виде:

$$a_1 = -\frac{A_2^*}{2} \cdot R^2, a_2 = -\frac{A_3^*}{4} \cdot R^3, a_3 = -\frac{A_4^*}{6} \cdot R^4, ...,$$

$$b_1 = \frac{A_0^*}{2} \cdot R^2, b_2 = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{1+\kappa}\right)\frac{A_1^*}{2} \cdot R^3, b_3 = -\frac{A_2^*}{3} \cdot R^4, b_4 = -\frac{3A_3^*}{8} \cdot R^5, ... \tag{6}$$

С помощью (1) - (6) построены распределения напряжений и перемещений в плоскости с отверстием.

Литература

1. *Мусхелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости.* М.: Наука (1966).