О новом обосновании корректности абстрактной задачи Коши для гиперболических дифференциально-операторных уравнений второго порядка в случае переменных областей определения

Ф. Е. Ломовцев, В. И. Яшкин (Минск, Беларусь)

Пусть H – гильбертово пространство со скалярным произведением $(\cdot,\cdot)$ и нормой $|\cdot|$. Доказана корректность задачи Коши для гиперболических дифференциально-операторных уравнений с младшей частью:

$$u''(t)+A(t)u(t)+A_1(t)u'(t)+A_0(t)u(t)=f(t),\ t\in]0,T[;\ u(0)=\varphi;\ u'(0)=\psi, \quad (1)$$

где линейные операторы $A(t)$ имеют зависящие от t области определения $D(A(t))$ и $A_1(t)$, $A_0(t)A^{-1/2}(t)$ ограничены в H. Ранее корректность задачи (1) доказывалась с помощью сглаживающих операторов $A_\varepsilon^{-1}(t)=(I+\varepsilon A(t))^{-1}$, $\varepsilon>0$, и оценок на первые две ограниченные сильные производные $A^{-1\,\prime}(t)$, $A^{-1\,\prime\prime}(t)$ по параметру t от ограниченных в H обратных $A^{-1}(t)$ в [1], формулы первой слабой производной $A'(t)$ по t от $A(t)$ и оценок на первые две ограниченные сильные производные $A^{-1\,\prime}(t)$, $A^{-1\,\prime\prime}(t)$ по t в [2]. В настоящей работе ее корректность установлена только с помощью оценок на первые две ограниченные слабые производные $\overline{A}\,'(t)$, $\overline{A}\,''(t)$ по t от их расширений по непрерывности до ограниченных операторов $\overline{A}(t)\in\mathcal{L}(H,W^-(t))$. Здесь $W^-(t)$ – антидвойственные банаховы пространства с нормами функционалов $[\cdot]_{(-t)}$ к гильбертовым пространствам $W^+(t)$, областям определения $D(A(t))$ с нормами $[\cdot]_{(t)}=|A(t)\cdot|$, $t\in[0,T]$.

Теорема. *Пусть при всех $t\in[0,T]$ самосопряженные положительные операторы $A(t)$ в H имеют ограниченные обратные операторы $A^{-1}(t)$ и у их расширений $\overline{A}(t)$ существуют первые две ограниченные слабые производные $\overline{A}\,'(t)$, $\overline{A}\,''(t)\in B\left([0,T],\mathcal{L}(H,W^-(t))\right)$, для которых выполняются оценки:*

$$\langle\overline{A}\,'(t)u,u\rangle_{(t)}\le c_0(A(t)u,u),\ \forall u\in D(A(t)),\ c_0\ge 0,$$

$$|\langle\overline{A}\,'(t)A^{-1}(t)v,v\rangle_{(t)}|\le c_1|v|^2,\ \forall v\in H,\ c_1\ge 0,$$

$$|\langle\overline{A}\,''(t)A^{-1}(t)v,u\rangle_{(t)}|\le c_2|v|\sqrt{(A(t)u,u)},\ \forall v\in H,\ \forall u\in D(A(t)),\ c_2\ge 0.$$

Тогда для любых $f\in\mathcal{H}=L_2(]0,T[,H)$, $\varphi\in D(A^{1/2}(0))$, $\psi\in H$ задача Коши (1) имеет единственные сильные решения $u\in E$ и существует $c_3>0$, что

$$\|u\|_E^2=\sup_{0<t<T}\left[\left|\frac{du(t)}{dt}\right|^2+|A^{1/2}(t)u(t)|^2\right]\le c_3\left[\int_0^T|f(t)|^2dt+|A^{1/2}(0)\varphi|^2+|\psi|^2\right].$$

Литература

1. *Ломовцев Ф.Е.* О необходимых и достаточных условиях разрешимости задачи Коши для гиперболических дифференциально-операторных уравнений второго порядка с переменными областями определения операторных коэффициентов. *Дифференц. уравнения.* Т. 28, No. 5 (1992), 873-886.

2. *Ломовцев Ф.Е.* Новая реализация метода энергетических неравенств для гиперболических дифференциально-операторных уравнений с переменными областями определения. *Доклады Академии наук.* Т. 456, No. 3 (2014), 275-279.