Аппроксимация алгебраическими дробями
и приближенное решение интегральных уравнений

В. Н. Русак, И. В. Рыбаченко (Минск, Беларусь)

Косинус-дробью Чебышёва – Маркова называют функцию

$$M_n(x) = \cos\varphi_{2n}(x),\ x \in [-1,1],\quad \varphi_{2n}(-1) = 2n\pi,$$

$$\varphi'_{2n}(x) = -\lambda_n(x)/2\sqrt{1-x^2},\quad \lambda_n(x) = 1 + \sum_{k=1}^{2n-1} \frac{\sqrt{1-a_k^2}}{1+a_k x},$$

где числа $\{a_k\}$ действительные и $|a_k| < 1$ или попарно комплексно-сопряжённые. Как известно [1] $M_n(x) = m_n(x)/\sqrt{q_{2n-1}(x)}$, где $m_n(x)$ полином, имеющий n различных простых нулей $\{x_k\}$, $k = \overline{1,n}$, на $(-1,1)$ и $q_{2n-1}(x) = \prod_{k=1}^{2n-1}(1+a_k x)$. С помощью эрмитовской интерполяции построена квадратурная формула

$$\int_{-1}^{1} \frac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}}dx = \sum_{k=1}^{n} \frac{2\pi}{\lambda_n(x_k)} f(x_k) + \rho_n(f), \tag{1}$$

точная на рациональных функциях порядка $2n-1$ с фиксированным знаменателем $q_{2n-1}(x)$.

Рассмотрено интегральное уравнение второго рода

$$y(s) - \lambda \int_{-1}^{1} \frac{h(s,t)y(t)}{\sqrt{1-t^2}}dt = f(s), \tag{2}$$

где $f(s) \in C[-1,1]$ – известная функция, ядро $h(s,t)$ непрерывно по совокупности переменных. Заменяя интеграл в левой части (2) по квадратурной формуле (1) и требуя выполнения этого равенства только в узловых точках $\{x_j\}$, $j = \overline{1,n}$, придем к системе линейных уравнений

$$z_j - \lambda \sum_{k=1}^{n} \frac{2\pi}{\lambda_n(x_k)} h(x_j, x_k) z_k = f(x_j), \tag{3}$$

решение которой определяет приближённые значения для решений уравнения (2) в узловых точках. Приближенное решение $z(s)$ для всех $s \in [-1,1]$ определяется через найденные $\{z_j\}$ с помощью интерполяционного оператора.

Найдена оценка погрешности приближенного решения в терминах наилучших приближений правых частей и ядер алгебраическими дробями вида

$$p_n(s)/\sqrt{q_{2n-1}(s)},\ \ p_n(s,t)/\sqrt{q_{2n-1}(s)},\ \ p_n(t,s)/\sqrt{q_{2n-1}(t)},$$

где $p_n(s,t)$ – полином по первой переменной с непрерывными коэффициентами по второй переменной.

Литература

1. *Русак В.Н. Рациональные функции как аппарат приближения.* Минск: Изд-во БГУ (1979).