Необходимые и достаточные требования гладкости и условия согласования вынужденных плоских колебаний в упругих движущихся средах

Ф. Е. Ломовцев, Е. Н. Новиков (Минск, Беларусь)

Получены формулы классических решений $u \in C^2(G)$ смешанной задачи:

$$\sqcap_{i=1}^{2}(\partial_t - (-1)^i a_i \partial_x + b_i)u(x,t) = f(x,t),\ \{x,t\} \in G = [0,d] \times [0,\infty[, \qquad (1)$$

$$\Gamma_i(t)u \equiv \left[\,\sqcap_{j=1}^{2}\left(\alpha_{ij}(t)\partial_t + \beta_{ij}(t)\partial_x + \gamma_{ij}(t)\right)u\right]\Big|_{x=d^{(i)}} = \mu_i(t), t \geq 0,\ i = 1, 2, \qquad (2)$$

$$u|_{t=0} = \varphi(x),\ \partial_t u|_{t=0} = \psi(x),\ 0 \leq x \leq d. \qquad (3)$$

Из уравнения (1) и условий (3) находим необходимые требования гладкости

$$f \in C(G),\ \mu_i \in C[0,\infty[,\ \varphi \in C^2[0,d],\ \psi \in C^1[0,d],\ i = 1,\ 2. \qquad (4)$$

Из условий (2) при $t = 0$, где $d^{(i)} = di - d$, условий (3) при $x = 0$ и $x = d$ и уравнения (1) при $t = 0$ выводим необходимые условия согласования

$$\alpha_{i2}(0)\{\alpha_{i1}[f(d^{(i)},0) + (a_2 - a_1)\psi'(d^{(i)}) + a_1 a_2 \varphi''(d^{(i)}) - (b_2 + b_1)\psi(d^{(i)}) -$$
$$-(a_1 b_2 - a_2 b_1)\varphi'(d^{(i)}) - b_2 b_1 \varphi(d^{(i)})] + \beta_{i1}\psi'(d^{(i)}) + \gamma_{i1}\psi(d^{(i)})\} +$$
$$+\beta_{i2}(0)[\alpha_{i1}\psi'(d^{(i)}) + \beta_{i1}\varphi''(d^{(i)}) + \gamma_{i1}\varphi'(d^{(i)})] + \gamma_{i2}(0)[\alpha_{i1}\psi(d^{(i)}) +$$
$$+\beta_{i1}\varphi'(d^{(i)}) + \gamma_{i1}\varphi(d^{(i)})] = \mu_i(0),\ i = 1,\ 2. \qquad (5)$$

Разбиваем G на прямоугольники $G^{(n)} = [0,d] \times [d_n, d_{n+1}]$, и на треугольники: $\Delta_{3n-2} = \left\{\{x,t\} : x > a_1 t_n,\ x + a_2 t_n < d, x \in]0,d[\right\}$, $\Delta_{3n-1} = \left\{\{x,t\} : x \leq a_1 t_n,\ x \in [0, a_1 d_2]\right\}$, $\Delta_{3n} = \left\{\{x,t\} : x + a_2 t_n \geq d,\ x \in [a_1 d_2, d]\right\}$, $t \in [d_n, d_{n+1}]$, $d_n = (n-1)d/(a_1 + a_2)$, $t_n = t - d_n$, $n = 1, \ldots$

Теорема. *Пусть* $\alpha_{i2}, \beta_{i2}, \gamma_{i2} \in C[0,\infty[,\ a_i \alpha_{ij} \neq (-1)^{i+1}\beta_{ij},\ a_i > 0,\ t \in [0,\infty[,\ i,\ j = 1,\ 2$. *Задача (1)–(3) имеет единственные классические решения*

$$u_{3n-2}(x,t) = \frac{1}{a_1 + a_2}\Big(a_1 e^{-b_2 t_n}\varphi_n(x + a_2 t_n) + a_2 e^{-b_1 t_n}\varphi_n(x - a_1 t_n) +$$
$$+ e^{-A t_n}\int\limits_{x - a_1 t_n}^{x + a_2 t_n} e^{B(x-s)}\left[A\varphi_n(s) + \psi_n(s)\right] ds\Big) + F_n^{(1)}(x,t),$$

$$u_{3n-1}(x,t) = \Phi_{3n-1}(x,t) + a_1 \int\limits_0^{t_n - \frac{x}{a_1}} e^{C_1 t_n - D_1(a_1\tau + x)}\Bigg(a_1 \int\limits_{d_n}^{d_n + \tau} P_{3n-1}(\nu) \times$$
$$\times \exp\left\{E_n^{(1)}(\nu,\tau) + b_1(\nu - d_n)\right\} \frac{(a_1\alpha_{11} - \beta_{11})^{-1}}{a_1\alpha_{12}(\nu) - \beta_{12}(\nu)}\, d\nu +$$

$$+\frac{b_2\varphi_n(0)+\psi_n(0)-a_2\varphi_n'(0)}{a_1+a_2}\exp\{E_n^{(1)}(d_n,\tau)\}\Bigg)d\tau+F_n^{(1)}(x,t),$$

$$u_{3n}(x,t)=\Phi_{3n}(x,t)+a_2\int\limits_0^{t_n-\frac{d-x}{a_2}}e^{C_2t_n-D_2(a_1\tau+d-x)}\Bigg(a_2\int\limits_{d_n}^{d_n+\tau}P_{3n}(\nu)\times$$

$$\times\exp\left\{E_n^{(2)}(\nu,\tau)+b_2(\nu-d_n)\right\}\frac{(a_2\alpha_{21}+\beta_{21})^{-1}}{a_2\alpha_{22}(\nu)+\beta_{22}(\nu)}\,d\nu+$$

$$+\frac{b_1\varphi_n(d)+\psi_n(d)+a_1\varphi_n'(d)}{a_1+a_2}\exp\{E_n^{(2)}(d_n,\tau)\}\Bigg)d\tau+F_n^{(2)}(x,t),$$

где $n=1,...,u_{3n-k}$ – *решения в треугольниках* Δ_{3n-k}, $k=0,1,2,$

$$\varphi_1(x)=\varphi(x),\ \psi_1(x)=\psi(x),\ x\in[0,d],$$

$$\varphi_n(x)=u_{3n+j-4}|_{t=d_n},\ \psi_n(x)=\partial_t u_{3n+j-4}|_{t=d_n},$$

$$x\in[ja_1d_2,(a_1+ja_2)d_2],\ j=0,\ 1,\ n=2,\ 3,...,\ A=\frac{a_1b_2+a_2b_1}{a_1+a_2},$$

$$B=\frac{b_2-b_1}{a_1+a_2},\ C_i=\frac{(-1)^{i+1}b_i\beta_{i1}-a_i\gamma_{i1}}{a_i\alpha_{i1}+(-1)^i\beta_{i1}},\ D_i=\frac{b_i\alpha_{i1}-\gamma_{i1}}{a_i\alpha_{i1}+(-1)^i\beta_{i1}},$$

$$E_i(t)=\frac{b_i\alpha_{i2}(t)-\gamma_{i2}(t)}{a_i\alpha_{i2}(t)+(-1)^i\beta_{i2}(t)},\ E_n^{(i)}(a,b)=a_i\int\limits_a^{d_n+b}E_i(s)ds,$$

$$F_n^{(i)}(x,t)=\frac{1}{a_1+a_2}\int\limits_{d_n}^{t}e^{A(\tau-t)}\int\limits_{p_i(x)-a_i(t-\tau)}^{p_i(x)+a_{3-i}(t-\tau)}e^{B(x-p_i(s))}f\left(p_i(|s|),\tau\right)ds\,d\tau,$$

$$p_i(x)=d^{(i)}-(-1)^ix,\ \Phi_{3n-j}(x,t)=\frac{e^{-b_{1+j}t_n}}{a_1+a_2}\Bigg\{a_{2-j}\varphi_n(x-(-1)^ja_{j+1}t_n)+$$

$$+a_2e^{B(x-(-1)^ja_{j+1}t_n)}\varphi_n(d-jd)+$$

$$+(-1)^j\int\limits_{x-(-1)^ja_{j+1}t_n}^{d-jd}e^{B(x-(-1)^ja_{j+1}t_n-s)}[A\varphi_n(s)+\psi_n(s)]ds\Bigg\},$$

$$P_{3n-2+i}(t)=\mu_i(t)-\left\{\Gamma_i(t)\left(\Phi_{3n-2+i}(x,t)+F_n^{(i)}(x,t)\right)\right\}\Big|_{x=d(i-1)},$$

тогда и только тогда, когда выполняются условия (4), (5) и

$$\int\limits_{d_n}^{t}e^{b_i\tau}f(|d-|d-x-(-1)^ia_i(t-\tau)||,\tau)d\tau\in C^1(G^{(n)}),i=1,2,n=1,...$$