Связь равномерных рациональных и кусочно-полиномиальных приближений функции, заданной на отрезке, и ее сопряженной

Т. С. Мардвилко (Минск, Беларусь),
А. А. Пекарский (Минск, Беларусь)

Через $L_\infty(I)$ и $C(I)$ обозначим соответсвенно банаховы пространства действительных существенно ограниченных и непрерывных функций на отрезке I ($I := [-1, 1]$). Для $\alpha > 0$ и $p \in (0, \infty)$ через $B_p^\alpha = B_p^\alpha(I)$ обозначим пространство Бесова (см., например, [1]).

Пусть функция $g(x)$ определена на отрезке I и интегрируема на нём с весом $1/\sqrt{1-x^2}$. Тогда $\hat{g}(x)$ – функция сопряжённая $g(x)$ определяется следующим образом

$$\hat{g}(x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{\pi} \int_I \frac{g(t)}{t-x} \cdot \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}, \quad x \in I,$$

где сингулярный интеграл понимается в смысле главного значения по Коши.

Через $\mathcal{R}_n$ обозначим множество рациональных функций степени не выше n. Для $n, s \in \mathbb{N}$ через $\Pi_n^s = \Pi_n^s(I)$ обозначим множество кусочно-полиномиальных функций, определённых на I, степени не выше $s-1$ с не более чем n узлами. Мы подразумеваем под $R_n(g)_\infty$ и $E_n^{(s)}(g)_\infty$ наилучшие приближения в $L_\infty(I)$ функции $g \in C(I)$ множествами $\mathcal{R}_n$ и Π_n^s соответственно.

Теорема. Пусть $\alpha > 1, s \in \mathbb{N} \cap (\alpha, \infty)$ и $g \in C(I)$. Тогда следующие условия равносильны:

(i) $\quad \sum_{n=1}^\infty (R_n(g)_\infty)^{1/\alpha} < \infty$;

(ii) $$\begin{cases} \sum_{n=1}^\infty \left(E_n^{(s)}(g)_\infty\right)^{1/\alpha} & < \infty, \\ \sum_{n=1}^\infty \left(E_n^{(s)}(\hat{g})_\infty\right)^{1/\alpha} & < \infty; \end{cases}$$

(iii) $\quad g \in B_{1/\alpha}^\alpha$.

Основной результат настоящей работы заключается в том, что к известным условиям (i) и (iii) мы добавили ещё одно эквивалентное условие (ii). Подробности смотрите в [3]. Отметим также, что ранее вторым из авторов [2] были получены аналогичные результаты для периодического случая.

Литература

1. *DeVore R.A., Lorenz G.G. Constructive Approximation.* Berlin, Heidelberg, New York.: Springer-Verlag (1993).

2. *Пекарский А.А.* Сопряжённые функции и их связь с равномерными рациональными и кусочно-полиномиальными приближениями. *Матем. сб.*, **206 :2** (2014), 175–182.

3. *Мардвилко Т.С., Пекарский А.А.* Сопряжённые функции на отрезке и их связь с равномерными рациональными и кусочно-полиномиальными приближениями. *Матем. заметки*, В печати.