Уравнение связи интегральных подстановок проблемы Римана

Л. А. Хвощинская, Т. Н. Жоровина (Минск, Беларусь)

Построение регулярной системы дифференциальных уравнений второго порядка по заданной группе монодромии V_1, V_2, ..., V_n приводит к необходимости логарифмирования произведения $V_0 = V_1 V_2 ... V_n$ этих матриц.

Обозначим ρ_k, σ_k – характеристические числа матриц интегральных подстановок $W_k = \frac{1}{2\pi i} \ln V_k$ $(k = 1, ..., n)$, предварительно зафиксировав ветви логарифмов. Тогда ветви характеристических чисел ρ, σ матрицы $W_0 = \frac{1}{2\pi i} \ln(V_1 V_2 ... V_n)$ выбираем из условия $\sum\limits_{k=1}^{n} (\rho_k + \sigma_k) = \rho + \sigma$.

Представим матрицу W_0 в виде суммы

$$W_0 = \sum_{k=1}^{n} M_k^{-1} W_k M_k, \tag{1}$$

где M_k – матрицы, подлежащие определению.

Обозначим C_k $(k = 0, 1, ..., n)$ матрицы, приводящие матрицы V_k к нормальной жордановой форме G_k. Тогда (1) можно записать в виде

$$S_0 = C_0^{-1} W_0 C_0 = \sum_{k=1}^{n} C_0^{-1} M_k W_k M_k^{-1} C_0 = \sum_{k=1}^{n} S_k. \tag{2}$$

Зная матрицы S_k, находим $M_k = C_0 N_k C_k^{-1}$, где $N_k^{-1} S_k N_k = G_k$ – жорданова.

Пусть C_0 не приводит матрицы V_k $(k = 1, ..., n)$ к треугольному виду. При $n = 2$ было получено следующее представление:

$$S_0 = S_1 + S_2 = \begin{pmatrix} s_1 & \frac{\gamma_1}{c} \\ c & \rho_1 + \sigma_1 - s_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} s_2 & -\frac{\gamma_2}{c} \\ -c & \rho_2 + \sigma_2 - s_2 \end{pmatrix}, \quad \rho \neq \sigma, \tag{3}$$

где $s_1 = \frac{\rho_1\sigma_1 - (\rho-\rho_2)(\rho-\sigma_2)}{\sigma-\rho}$, $s_2 = \frac{\rho_2\sigma_2 - (\rho-\rho_1)(\rho-\sigma_1)}{\sigma-\rho}$, $\gamma_k = -(s_k - \rho_k)(s_k - \sigma_k)$, $k = 1, 2$, c – произвольная постоянная. Если $\rho = \sigma$, то формулу (3) применяем для матрицы W_k с $\rho_k \neq \sigma_k$. При $n = 3$ с помощью формулы (3) представляем $\ln(V_1(V_2V_3))$ и $\ln((V_1V_2)V_3)$ в виде двух сумм. Обозначив ρ_1^*, σ_1^* и ρ_3^*, σ_3^* характеристические числа соответственно матриц $\frac{1}{2\pi i} \ln(V_2V_3)$ и $\frac{1}{2\pi i} \ln(V_1V_2)$, находим числа ρ_2^*, σ_2^* из уравнений $\rho_1 + \sigma_1 + \rho_3 + \sigma_3 = \rho_2^* + \sigma_2^*$ и $\rho_2^*\sigma_2^* = \rho\sigma + \rho_1\sigma_1 + \rho_2\sigma_2 + \rho_3\sigma_3 - \rho_1^*\sigma_1^* - \rho_3^*\sigma_3^*$. Тогда справедливо представление

$$S_0 = \sum_{k=1}^{3} S_k = \sum_{k=1}^{3} \begin{pmatrix} s_k & \frac{\gamma_k}{c_k} \\ c_k & \rho_k + \sigma_k - s_k \end{pmatrix},$$

где $s_k = \frac{1}{\sigma-\rho} \left[\rho_k\sigma_k - (\rho - \rho_k^*)(\rho - \sigma_k^*)\right]$, $\gamma_k = -(s_k - \rho_k)(s_k - \sigma_k)$, $c_1 = c$ – произвольная постоянная, $c_2 = -(1+t)c$, $c_3 = ct$, а t – корень квадратного уравнения $\gamma_1 t^2 + (\gamma_1 - \gamma_2 + \gamma_3)t + \gamma_3 = 0$.

Аналогично строится представление (2) при любом n. Элементы матриц S_k выражаются через характеристические числа матриц $\frac{1}{2\pi i} \ln V_j$, $\frac{1}{2\pi i} \ln(V_1 V_2 ... V_j)$, $\frac{1}{2\pi i} \ln(V_{j+1} ... V_n)$, $j = 1, 2, ..., n$.