

**Аналитическое решение задачи дробной диффузии
во фрактальных мобильно-немобильных средах**

Н. Г. Абрашина–Жадавева, И. А. Тимощенко (Минск, Беларусь)

В настоящее время дробные производные успешно применены в задачах биологии, физики, биохимии, гидрологии (см. [1] и цитируемую там литературу). Это явилось естественным при моделировании процессов, поскольку интегралы и производные дробных порядков учитывают память и наследственные свойства различных веществ. Многообещающим представляется класс моделей фрактальных мобильно-немобильных (ММ) сред [2]. Такие модели основаны на предположении, что некоторые частицы диффундируют стандартным образом, подчиняясь закону Фика, и в уравнении ММ им соответствует слагаемое $\frac{\partial u}{\partial t}$. Другие же частицы взаимодействуют со скелетом, “прилипают” к нему и до момента отрыва остаются неподвижны. В этом случае уместно использовать дробную производную Капуто ${}_t D_0^\alpha u$.

В сообщении построено аналитическое решение задачи, описывающей процесс аномальной диффузии во фрактальных мобильно-немобильных сред [1,3]:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \varkappa {}_t D_0^\alpha u = -K_\beta (-\Delta)^{\beta/2} u, \quad 0 < x < l, \quad t > 0 \quad (1)$$

$$u(0, t) = u(l, t) = 0, \quad u(x, 0) = \varphi(x),$$

где $0 < \alpha < 1$, $1 < \beta < 2$, оператор $-(-\Delta)^{\beta/2}$, где Δ — оператор Лапласа, при рассматриваемых граничных условиях эквивалентен дробной производной Рисса [1], \varkappa — среднее отношение взаимодействующих и невзаимодействующих частиц со скелетом. Применяя метод Фурье и операционный метод, получено общее решение для уравнения (1):

$$u(x, t) = \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin \lambda_n x \int_0^{\infty} \frac{e^{-rt} \varkappa K_\beta \lambda_n^\beta r^{\alpha-1} \sin \pi \alpha dr}{(K_\beta \lambda_n^\beta - r)^2 + \varkappa^2 r^{2\alpha} + 2(K_\beta \lambda_n^\beta - r) \varkappa r^\alpha \cos \pi \alpha},$$

где $\lambda_n = \frac{\pi n}{l}$ и $A_n = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(x) \sin \lambda_n x dx$.

Благодарности. Работа выполнена в рамках ГПНИ "Конвергенция".

Литература

1. Yang Q., Liu F, Turner I. Numerical methods for fractional partial differential equations with Riesz space fractional derivatives. *Applied Mathematical Modelling* 34 (2010) 200–218.
2. Shumer R. et. al. Fractal mobile/immobile solute transport. *Water Resour. Res.* 39 (2003) 1–10.
3. Марышев Б.С., Любимова Т.П., Любимов Д.В., Néel М.-С. Дискретизация потока примеси в рамках фрактальной модели аномальной диффузии. *Вычислительная механика сплошных сред*. 3, №2 (2010) 70–82.