В. М. Ширяев

ПОЛУРЕШЕТКИ КОНЕЧНОЙ ШИРИНЫ С ПОПАРНО СРАВНИМЫМИ РАЗЛОЖИМЫМИ ЭЛЕМЕНТАМИ

В данной работе продолжается исследование полурешеток конечной ширины, начатое в [5] и [6]. Показано, как составить любую полурешетку ширины $n>2$ с указанным в заглавии свойством по некоторому набору цепей и деревьев ширины не более n. Конструкция в определенном смысле инвариантна относительно автоморфизмов. Основные теоремы сформулированы в § 2. В § 5 собраны примеры, в частности, приведена диаграмма однородной полурешетки указанного класса.

§ I. Терминология и обозначения

Используем в основном обычные термины и обозначения теории полурешеток и упорядоченных множеств. Некоторые из них, а также вновь введенные выписаны ниже.

Пусть E – множество. Тогда $|E|$ – его мощность, $\Delta_E=\{(a,a)\}_{a\in E}$ – его диагональ. Сумма, то есть дизъюнктное объединение множеств E и F, обозначается через $E\sqcup F$. Пусть теперь E – упорядоченное множество с порядком $\leqslant$, A,B – его подмножества. Положим $[A,B]=\{c\in E\mid\exists a\in A\ \exists b\in B(a\leqslant c\leqslant b)\}$, $[A,B[=[A,B]\setminus B$, $[A)=\{c\in E\mid\exists a\in A\,(a\leqslant c)\}$, $]A)=[A)\setminus A$ двойственно определяем множества $]A,B]$, $(A]$, $(A[$. Отношение $\leqslant\cup\overset{-1}{\leqslant}$ сравнимости обозначается через $\gtrless$, дополнительное к нему отношение несравнимости – через $\|$. Запись $A\leqslant B$, $A\gtrless B$, $A\| B$ будет означать, что соответствующие отношения содержат все пары из $A\times B$. Через $A^{\cup}$ (соответственно $A^{\cap}$) обозначим множество всех немаксимальных (неминимальных) элементов из A. Положим

$$Com\,A=\{a\in E\mid\{a\}\gtrless A\}.$$

Шириной E называем точную верхнюю грань мощностей всех антицепей E (то есть подмножеств, состоящих из попарно несравнимых элементов). E называем лесом, если мажоранты каждого элемента образуют цепь. Максимальную подцепь леса называем стволом. Пусть E – минорантная полурешетка с умножением. Ее элемент a называем разложимым, если $a=bc$, где $b\| c$. $Dec\,E$ будет означать множество всех разложимых элементов E. Если оно пусто или цепь, то E называем моноризальной полурешеткой. Положим $Kar\,E=Com\,Dec\,E$.

Множество $Piv\,E = ComKar\,E$ назовем стержнем E. Если E моноризальна и не цепь, то $\emptyset \neq Dec\,E \subseteq Piv\,E \subseteq Kar\,E$ и $Piv\,E$ есть подцепь полурешетки E. Пусть теперь E - цепь. Множество ее выпуклых подцепей обозначаем через $Kon\,E$. Рассмотрим семейство

$$(A_\alpha)_{\alpha\in\Gamma} \qquad (I.I.)$$

выпуклых подцепей цепи E.

Для $a \in E$ множество $\{\alpha\in\Gamma \mid a \in A_\alpha\}$ обозначаем через Γ_a. Положим

$$a\Gamma = \begin{cases} \emptyset, & \text{если } \Gamma_a = \emptyset, \\ \bigcap\{A_\alpha \mid \alpha\in\Gamma_a\}, & \text{если } \Gamma_a \neq \emptyset. \end{cases}$$

Определим плотность $d_\Gamma a$, кратность $h_\Gamma a$, ранг $r_\Gamma a$ элемента a относительно семейства (I.I.) по формулам

$$d_\Gamma a = \begin{cases} 1 \iff |a\Gamma| > 1, \\ 0 \iff |a\Gamma| \leqslant 1. \end{cases}$$

$$h_\Gamma a = |\Gamma_a|, \qquad r_\Gamma a = h_\Gamma a + d_\Gamma a.$$

Рангом r_Γ семейства (I.I.) назовем кардинал $\sup\{r_\Gamma a \mid a \in E\}$. Следуя [I], семейство (I.I.) назовем сцепленным, если $\forall \alpha,\beta\in\Gamma\ \exists m \in N,$

$$\exists \alpha_1,\dots,\alpha_m \in \Gamma(\alpha=\alpha_1, \beta=\alpha_m,\ A_{\alpha_1}\cap A_{\alpha_2} \neq \emptyset \neq \dots \neq \emptyset \neq A_{\alpha_{m-1}} \cap A_{\alpha_m}).$$

Телом семейства (I.I.) назовем объединение всех его множеств. Тело сцепленного семейства (I.I.) выпукло в E, что доказывается аналогично Предложению I.4.9 книги [I]. Семейство (I.I.) назовем покрытием цепи E, если его тело совпадает с E. Покрытие (I.I.) назовем начальным, если

$$\forall \alpha,\beta\in\Gamma(A_\alpha \subseteq A_\beta \Rightarrow \alpha=\beta).$$

На множестве $Kon\,E$ введем отношения $\triangleleft$ и $\blacktriangleleft$, именно для $A, B \in Kon\,E$:

$$A \triangleleft B \iff \emptyset \neq A\setminus B < B\cap A < B\setminus A \neq \emptyset,$$

$$A \blacktriangleleft B \iff A \triangleleft B \wedge A \cap B \neq \emptyset .$$

Цепь E назовем δ - цепью, если она дуально вполне упорядочена и γ - цепью в противном случае. Для всякой γ-цепи существует наибольший (по включению) идеал $I(E)$ среди идеалов полурешетки E , не имеющих наибольших элементов.

§ 2. Основные теоремы

Полурешетку E назовем разложимой, если ее нельзя гомоморфно отобразить на нетривиальную цепь. Известно, что каждая полурешетка единственным образом разлагается в ординальную сумму неразложимых полурешеток (с линейно-упорядоченным множеством индексов). Легко видеть, что полурешетка монорnaльна и имеет ширину n тогда и только тогда, когда каждая компонента ее ординального разложения монориэальна и имеется компонента с наибольшей шириной, равной n . Поэтому описание монориэальных полурешеток ширины n сводится к описанию неразложимых монориэальных полурешеток ширины $\leqslant n$. Как следует из [5], каждая полурешетка ширины 2 монориэальна, там же есть их описание. В работе [6] получено описание монориэальных полурешеток ширины 3. Конструкция, позволяющая получать неразложимые монориэальные полурешетки ширины $n>2$ с заданным стержнем A , представлена ниже. Процесс реализуется в пять шагов: I) построение сцепленного покрытия ранга n ; 2) получение исходя из него фундаментального покрытия цепи A ; 3) выбор промежуточного семейства цепей, вписанного в фундаментальное покрытие; 4) построение сопровождающего монотонного отображения; 5) получение полурешетки E как расширения A вдоль сопровождающего отображения.

I) Пусть A есть цепь, $n>2$. Тогда существует сцепленное покрытие цепи A ранга n . Способ построения такого покрытия коротко описан в § 3.

2) Сцепленное покрытие (I.I.) цепи A назовем фундаментальным, если выполняются условия:

Г1. $\forall\alpha\in\Gamma(|A_\alpha|=1 \Rightarrow \exists\beta\in\Gamma\setminus\alpha((A_\alpha]=(A_\beta]))$.

Г2. $\forall\alpha,\beta\in\Gamma(([A_\alpha]=A \quad \wedge$ (цепь $[A_\beta)$ есть δ - цепь, содержащаяся в A_α) $\Rightarrow \exists\gamma\in\Gamma\setminus\alpha$
$((A_\gamma]=A \vee \exists\lambda\in\Gamma\setminus\gamma\,\exists a\in A(a=$
$=\max A_\gamma=\max A_\lambda \wedge \forall\mu\in\Gamma(a\in[A_\mu)\ \&$
$\&\ (a=\min A_\mu \Rightarrow |A_\mu|=1))))$.

Предложение 2.I. Если сцепленное покрытие ранга n не фундаментально, то добавлением или исключением из него некоторых одноэлементных цепей можно получить фундаментальное покрытие ранга n.

3) Пусть теперь (I.I.) - фундаментальное покрытие. Рассмотрим семейство

$$(D_\alpha)_{\alpha\in\Gamma} \tag{2.I.}$$

подцепей цепи A. Его назовем промежуточным семейством, вписанным в покрытие (I.I.), если выполняются условия:

$D1.$ $\forall_\alpha\in\Gamma$ (D_α содержится и коинициальна в A_α);

$D2.$ $\forall\alpha\in\Gamma\ \forall a\in D_\alpha(a=\max A_\alpha \Rightarrow \exists\beta\in\Gamma\setminus\{\alpha\}$
$(a=\max A_\beta\in D_\beta)$;

$D3.$ $\forall\alpha\in\Gamma\forall a\in D_\alpha(a=\max(\cup_{\beta\in\Gamma}D_\beta)\cap A_\alpha \Rightarrow a=\max A_\alpha)$.

Предложение 2.2. Для каждого фундаментального покрытия существует вписанное в него промежуточное семейство.

4) Пусть B есть лес с множеством $\{B_\alpha\}_{\alpha\in\Gamma}$ всех его стволов. Пусть $\varphi: B\to A$ - монотонное отображение и пусть выполняются следующие условия:

$B1.$ $\forall\alpha\in\Gamma(\varphi(B_\alpha)=D_\alpha)$

$B2.$ $\forall\alpha,\beta\in\Gamma(B_\alpha\cap B_\beta\neq\emptyset \Rightarrow (A_\alpha]=(A_\beta])$.

$B3.$ $\forall\alpha\in\Gamma\ \forall a\in D_\alpha(a=\max A_\alpha \Rightarrow$

$\Rightarrow \exists\beta\in\Gamma(a=\max A_\beta\in D_\beta \wedge B_\alpha\cap B_\beta=\emptyset))$.

Тогда семейство

$$(\{B_\alpha\}_{\alpha\in\Gamma}, B, \varphi, A, (A_\alpha)_{\alpha\in\Gamma}) \tag{2.2.}$$

назовем допустимым, а φ - сопровождающим отображением.

<u>Предложение 2.3.</u> Для любого фундаментального покрытия (I.I.) и вписанного в него промежуточного семейства (2.I.) существуют лес B и отображение φ, такие, что семейство (2.2.) допустимо.

5) Пусть теперь (2.2.) - допустимое семейство. Положим $E = A \sqcup B$. Определим отношение σ_E на E:

$$\sigma_E = \sigma_A \cup \sigma_B \cup \bigcup_{\alpha \in \Gamma, a \in B} (\sigma_\alpha \cup \Delta_E) \circ (\sigma_a \cup \Delta_E),$$

где σ_A и σ_B - отношения порядка на A и B соответственно и для $\alpha \in \Gamma,\ a \in B$

$$\sigma_\alpha = B_\alpha \times]A_\alpha),\ \sigma_a = (\varphi a] \times \{a\}.$$

<u>ТЕОРЕМА 2.4.</u> Отношение σ_E есть отношение порядка на E, с которым E становится неразложимой моноризальной полурешеткой ширины n со стержнем A.

В этом случае E будем называть расширением цепи A вдоль отображения φ, а семейство (2.2.) - фундаментом E.

<u>ТЕОРЕМА 2.5.</u> Всякая неразложимая моноризальная полурешетка ширины $n > 2$ есть расширение своего стержня вдоль некоторого сопровождающего отображения.

<u>ТЕОРЕМА 2.6.</u> Пусть для $i \in \{1,2\}$ будет $(\{B^i_\alpha\}_{\alpha \in \Gamma^i}, B^i, \varphi^i, A^i, (A^i_\alpha)_{\alpha \in \Gamma^i})$ фундамент полурешетки E^i. E^1- изоморфна E^2 тогда и только тогда, когда существует изоморфизм ρ цепи A^1 на A^2, изоморфизм ν леса B^1 на B^2, биекция $\varkappa$ множества Γ^1 на Γ^2, такие, что выполняются условия:

$$I1.\ \forall \alpha \in \Gamma^1\ (\rho(A^1_\alpha) = A^2_{\varkappa\alpha}).$$

$$I2.\ \forall \alpha \in \Gamma^1\ (\nu(B^1_\alpha) = B^2_{\varkappa\alpha}).$$

$$I3.\ \rho \circ \varphi^1 = \varphi^2 \circ \nu.$$

<u>Доказательства</u> предложений 2.I. - 2.3 намечены в § 4. Теоремы 2.4 - 2.6 приводятся без доказательства.

§ 3. Сцепленное покрытие

Предположим, что (I.I.) - сцепленное покрытие цепи A ранга $n \geqslant 2$. Пусть $Q \subseteq \Gamma$. Семейство

$$(A_\alpha)_{\alpha \in Q} \tag{3.I.}$$

назовем базой покрытия (I.I.), если выполняются условия:

Q1. Семейство (3.I) есть начальное покрытие цепи A.

Q2. $\forall \alpha \in \Gamma \, \exists \beta \in Q (A_\alpha \subseteq A_\beta)$.

Из $Q2$ следует, что всякая база есть сцепленное покрытие A. Любое сцепленное покрытие цепи A конечного ранга имеет базу. Если (I.I.) - такое покрытие, то в качестве Q можно взять максимальное по включению множество элементов из Γ, попарно несравнимых и максимальных относительно квазипорядка $\precsim$, где $\forall \alpha, \beta \in \Gamma (\alpha \precsim \beta \Longleftrightarrow A_\alpha \subseteq A_\beta)$.

<u>ЛЕММА 3.I.</u> Покрытие (I.I.) цепи A конечного ранга есть сцепленное начальное покрытие тогда и только тогда, когда существует биекция ρ множества Γ на некоторую выпуклую подцепь цепи Z целых чисел такая, что

$$\forall \alpha \in \Gamma (\rho\alpha + 1 \in \rho(\Gamma) \Longrightarrow A_\alpha \lessdot A_{\rho^{-1}(\rho\alpha+1)}).$$

<u>ЛЕММА 3.2.</u> Пусть (I.I.) есть семейство выпуклых подцепей цепи A ранга $n \geqslant 1$. Тогда существует разбиение

$$\Gamma = \bigsqcup_{t \in T} \Gamma^t \tag{3.2.}$$

множества Γ, для которого каждое семейство $(A_\alpha)_{\alpha \in \Gamma^t}$, где $t \in T$, есть сцепленное покрытие цепи $C^t = \bigcup_{\alpha \in \Gamma^t} A_\alpha$, причем цепи C^t попарно дизъюнктны и $max\{r_{\Gamma^t}\} = n$.

Итак, построение любого покрытия цепи A ранга n сводится к построению сцепленных покрытий ранга $\leqslant n$ компонент выпуклого разбиения A. Сцепленное покрытие ранга I - это одноэлементное покрытие одноэлементной цепи. Пусть (I.I.) - сцепленное покрытие цепи A и (3.I.) - его база

T_Γ. Положим $\Theta = \Gamma \setminus Q$ и пусть $\Theta \neq \varnothing$. Рассмотрим семейство

$$(A_\alpha)_{\alpha \in \Theta} \qquad (3.3.)$$

выпуклых подцепей цепи A. Его будем называть надстройкой покрытия (I.I.), а покрытие (3.I.) будем называть наполнением семейства (3.3.). Легко видеть, что ранг последнего меньше n. Используя это для построения сцепленного покрытия ранга, будем применять индукцию, предполагая надстройку построенной и конструируя соответствующим образом ее наполнение.

Итак, пусть дано семейство (I.I) выпуклых подцепей цепи A ранга меньше n. Пусть (3.2.) - разбиение Γ и цепи C^t определены как в лемме 3.2. Положим $C = \bigcup_{t \in T} C^t$. Для того чтобы покрытие (3.I.) было наполнением семейства (I.I.), необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие условия (с точностью до замены Q на равномощное множество):

$U1.$ $Q \in Kon(2\mathbb{Z}+1)$;

$U2.$ $\forall k \in Q^u (A_k \lhd A_{k+2})$;

$U3.$ $\forall \alpha \in \Gamma \exists k \in Q (A_\alpha \subseteq A_k)$;

$U4.$ Ранг семейства $(A_\alpha)_{\alpha \in \Gamma \sqcup Q}$ не больше n.

Пусть $P \in 2\mathbb{Z}$. Семейство

$$(A_k)_{k \in P} \qquad (3.4.)$$

выпуклых подцепей цепи A назовем гирляндой на A, если

$P1.$ $\forall k \in P ((A_k] \neq A \neq [A_k))$;

$P2.$ $\forall k \in P^u (A_k \lhd A_{k+2})$;

$P3.$ $\forall \alpha \in \Gamma \forall k \in P (A_\alpha \subseteq (A_k] \vee A_\alpha \subseteq [A_k))$;

$P4.$ Ранг семейства

$$(A_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}, \qquad (3.5.)$$

где $\Lambda = \Gamma \sqcup P$, не превосходит $n-1$;

$P5.\quad (P] = Z \Rightarrow \bigcup_{k\in P}(A_k] = A$;

$P6.\quad [P) = Z \Rightarrow \bigcup_{k\in P}[A_k) = A$.

Множество всех гирлянд на A обозначаем через $\mathcal{U}$. Если $\mathcal{U}$ есть обозначение (имя) гирлянды (3.4.), то полагаем $P^u = P,\ A_k^u = A_k,\ \Lambda^u = \Lambda$. Если P^u конечно, то гирлянду $\mathcal{U}$ называем конечной, а число $|P^u|$ - ее длиной. Если $(P^u] = Z$, то $\mathcal{U}$ называем бесконечной справа, двойственно определяем понятие бесконечной слева гирлянды. Пусть $u, v \in \mathcal{U}$. Положим $u \subset V$, если

$$(P^u = (P^v)^{\cup} \vee P^u = (P^v)^{\cap}) \wedge \forall k \in P^u (A_k^u = A_k^v).$$

Тогда V назовем расширением u , правым, если $P^u = (P^v)^{\cup}$, левым, если $P^u = (P^v)^{\cap}$. Всякая конечная гирлянда есть либо гирлянда длины I, либо расширение гирлянды меньшей длины.

Рассмотрим сначала способ построения гирлянды длины I. Положим

$$S = \{a \in A^{\cup\cap} \mid r_\Gamma a \leq n-2\},$$

$$R = \{a \in A^{\cup\cap} \mid r_\Gamma a = n-1 > h_\Gamma a,\ a = \min a\Gamma\},$$

$$L = \{a \in A^{\cup\cap} \mid r_\Gamma a = n-1 > h_\Gamma a,\ a = \max a\Gamma\}.$$

Каждая гирлянда длины I состоит из цепи G , удовлетворяющей условиям: I) $G \in \mathrm{Kon}\, A^{\cup\cap}$, 2) $G^{\cup\cap} \subseteq S$,
3) $a \in G \setminus S \Rightarrow a = \min G \in L \vee a = \max G \in R$,
4) G содержит цепь K одного из видов: KI) $K \subseteq S \setminus C$, K2) $\exists t \in T$ (K есть пересечение некоторых элементов базы покрытия $(A_\alpha)_{\alpha\in\Gamma^t}$ цепи C^t) K3) $\exists t \in T (K$ есть идеал или фильтр C^t).

Для существования G необходимо и достаточно, чтобы либо цепь S содержала цепь K одного из видов KI - K3, либо $\exists t \in T (\exists a \in R (a = \min C^t) \vee \exists a \in L (a = \max C^t))$.

Рассмотрим способ построения правого расширения. Пусть V есть правое расширение конечной гирлянды $\mathcal{U}$. Положим

$$p = \max P^u,\ G = A_{p+2}^v,\ \tilde{A} = [A_p^u).$$

Тогда семейства (G) есть гирлянда длины I на $\tilde{A}$, причем в качестве исходного семейства (I.I.) выступает $(\tilde{A} \cap A_\alpha)_{\alpha \in \Lambda^u}$ и выполняется дополнительное условие $A_p^u \triangleleft G$. Поэтому условия существования и способ построения расширения аналогичны условиям существования и способу построения гирлянды длины I.

Переходим к построению бесконечных гирлянд. Пусть имеется бесконечная последовательность расширений: $u_1 \subset u_2 \subset \ldots$ Для некоторого символа u положим $P^u = \bigcup_{i \in N} P^{u_i}$ и для $k \in P^u$ $A_k^u = A_k^{u_i}$, если $k \in P^{u_i}$. Тогда семейство $(A_k^u)_{k \in P}$ есть гирлянда, если выполняются условия:

$$(P^u] = Z \Rightarrow \bigcup_{k \in P^u} (A_k^u] = A,$$

$$[P^u) = Z \Rightarrow \bigcup_{k \in P^u} [A_k^u) = A.$$

Всякая бесконечная гирлянда строится таким способом.

Приступим к построению наполнения семейства (I.I.). По крайней мере одно существует - это A, его назовем тривиальным. Существование нетривиальных наполнений связано с наличием гирлянд на A. Пусть $u = (A_k)_{k \in P}$ - одна из них. Положим $Q = (P+1) \cup (P-1)$. Для $k \in Q$ определим множество

$$A_k = \begin{cases} [A_{k-1}, A_{k+1}], & \text{если } k+1, k-1 \in P, \\ [A_{k-1}), & \text{если } k+1 \notin P, k-1 \in P, \\ (A_{k+1}], & \text{если } k+1 \in P, k-1 \notin P. \end{cases}$$

Согласно $P2$, $A_k \neq \emptyset$, так что получаем семейство $(A_k)_{k \in Q}$, которое и есть требуемое наполнение. Таким образом можно построить любое наполнение для (I.I.). Процесс добавления наполнений к исходному семейству можно продолжать, пока не получим покрытия ранга n.

§ 4. Допустимое семейство

Наметим доказательство предложения 2.I. Пусть (I.I.) есть сцепленное покрытие цепи A, $r_\Gamma = n$ с базой (3.I.). Если $\Gamma 1$ не выполняется, то множество

$$X = \{\lambda \in \Gamma \mid \exists a \in A\, (A_\lambda = [a\} \wedge \forall \gamma \in \Gamma \setminus \{\lambda\} ((a] \neq (A_\mu]))\}$$

не пусто. Тогда семейство $(A_\alpha)_{\alpha \in \Gamma \setminus X}$ есть сцепленное покрытие цепи A ранга n, удовлетворяющее $\Gamma 1$. Пусть для него не выполняется $\Gamma 2$. Тогда A имеет наибольший элемент a. Присоединяя к исходному семейству цепь $\{a\}$, получим требуемое покрытие.

Наметим доказательство предложения 2.2. Пусть (I.I.) - фундаментальное покрытие цепи A с базой (3.I.). Будем строить семейство (2.I.). Можно считать, что $Q \in Kon\, Z$. Если Q имеет наибольший элемент q и существует $a \in A_q^\cap$, такой, что

$$\exists \gamma, \lambda \in \Gamma (\gamma \neq \lambda \wedge a = \max A_\gamma = \max A_\lambda \wedge$$
$$\forall \mu \in \Gamma \setminus \{a\} (a \in [A_\mu) \wedge (a = \min A_\mu \Rightarrow |A_\mu| = 1))),$$

то a назовем ориентиром и зафиксируем. Пусть $\alpha \in \Gamma$. Если $\exists \beta \in \Gamma \setminus \{\alpha\} ((A_\alpha] = (A_\beta]$, то положим $D_\alpha = A_\alpha$. Пусть теперь это условие не выполняется. Если $\alpha \in Q^U$, то положим $D_\alpha = A_\alpha \setminus A_{\alpha+1}$. Если $\alpha \in \Gamma \setminus Q^U$, то положим $D_\alpha = I(A_\alpha)$, если A_α есть γ цепь, $D_\alpha = (a[\, \cap A_\alpha$, если A_α есть δ - цепь, ориентир a существует и находится в A_α, $D_\alpha = A_\alpha^U$ в остальных случаях.

Предложение 2.3. доказывается так же, как и предложение 2.4. [6].

§ 5. Примеры

На рис. I представлены диаграммы всех жестких (с одним автоморфизмом) неразложимых монориэальных полурешеток мощности IO, ширины 5, размерности 6.

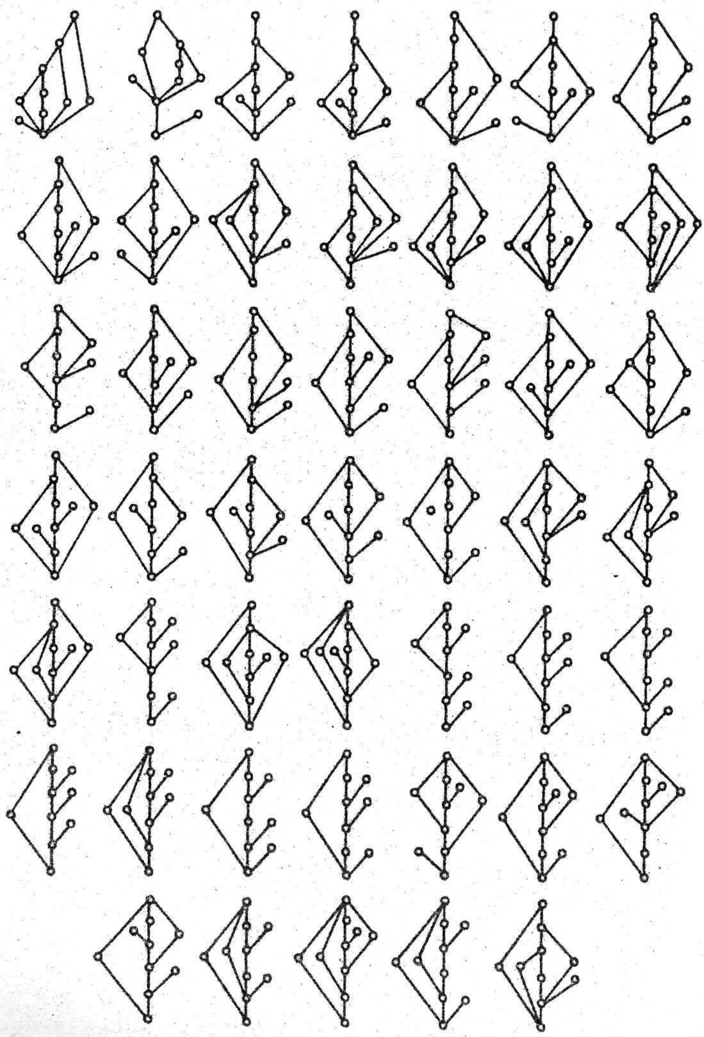

Рис.I

На рис.2 изображена диаграмма однородной монорезальной полурешетки ширины $n>2$. Здесь $A=\mathbb{R}$, $\Gamma=\mathbb{Z}$.

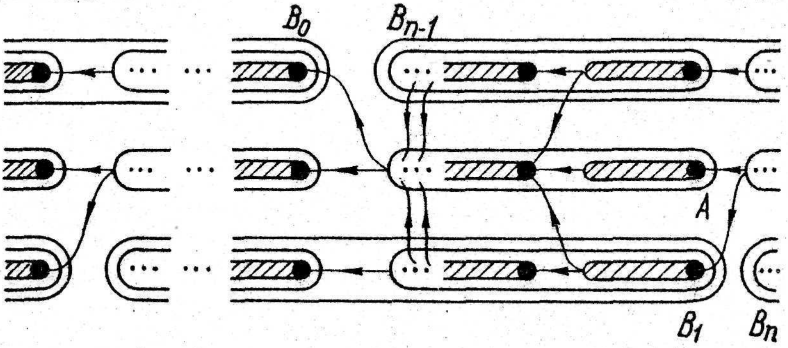

Рис.2

Для $k\in\Gamma$ $A_k=]k,k+n-1]$, $B=\bigsqcup_{k\in\Gamma}B_k$, $\varphi=\bigsqcup_{k\in\Gamma}\varphi_k$, где $\varphi_k=\chi_k\circ\mathcal{X}_k$, $\mathcal{X}_k$ есть изоморфизм B_k на A_k и для $a\in A_k$ $\chi_k(a)=\max\{b+\frac{1}{2m}\mid b\in\mathbb{Z}, m\in N, b+\frac{1}{2m}<a\}$.

Литература

1. Александров П.С., Пасынков Б.А. Введение в теорию размерности. М., 1973.
2. Салий В.Н. Лекции по теории решеток. Изд-во Сарат. ун-та, 1970.
3. Munn W.D. Uniform semilattices and bisimple inverse semigroups.- Quart. J. Math., 1966, v.17, N2, p. 151-159.
4. Birkhoff G. Lattice theory.- AMS Coll. Publ., 1967, v.25.
5. Širjaev V.M. Semilattices of width 2.- Semigroup Forum, 1976, v. 13, N2, p. 149-177.
6. Širjaev V.M. Semilattices of width 3 whose decomposable elements form a chain.- Semigroup Forum, 1979, v. 17, N3, p. 201-240.