УДК 512.533.8

В. М. Ширяев

Конечные фильтрующиеся полугруппы

Полугруппа называется фильтрующейся, если любая ее подполугруппа имеет наименьшее (по включению) порождающее множество. В данной работе показано, что всякая максимальная цепь непустых подполугрупп конечной фильтрующейся полугруппы имеет длину, равную порядку этой полугруппы, и этим свойством фильтрующиеся полугруппы характезуются в классе конечных полугрупп. Основной результат работы состоит в характеризации класса конечных фильтрующихся полугрупп с помощью запрещенных делителей, для чего найдены все конечные не фильтрующиеся полугруппы, у которых любой собственный делитель — фильтрующаяся полугруппа.

Введение

1°. Фильтрующиеся полугруппы относятся к числу тех универсальных алгебр, для которых возможно определить понятие размерности подалгебр аналогично понятию размерности подпространства векторного пространства на основе важнейшего общеалгебраического понятия порождающего множества. В последнее время к таким объектам исследования проявляется заметный интерес и в «неклассических» областях алгебры. Например, P. Jones в работах [18] и [19] ввел в рассмотрение и начал изучать инверсные полугруппы с *базисным свойством*. *Базисное свойство* универсальной алгебры A означает, что любые два минимальных (по включению) порождающих множества (базиса) произвольной подалгебры алгебры A должны иметь одинаковую мощность. Близкое к этому свойство *парагональности* универсальной включает в себя, кроме базисного свойства, еще условие наличия базиса у каждой подалгебры. Парагональные группы и полугруппы рассматривались в работах [1] и [2].

Более сильное, чем парагональность, свойство *фильтруемости* универсальной алгебры состоит в том, что любая ее подалгебра имеет наименьшее (по включению) порождающее множество. Среди нетривиальных групп таким свойством обладает лишь двухэлементная группа, в то же время класс фильтрующихся полугрупп оказывается довольно широким и включает в себя многие известные классы полугрупп. Например, очевидно, что туда входят все свободные, все нильпотентные и все полугруппы с конечными разложениями [17] (в оригинале «locally finite»). Кроме того, в работах [11] и [12], где было начато исследование фильтрующихся полугрупп, показано, что к ним относятся все конечно порожденные коммутативные архимедовы полугруппы без идемпотентов, все конечные полурешетки и др. Данная статья является продолжением работ [11] и [12] в направлении более детального изучения свойств конечных фильтрующихся полугрупп.

2°. Интерес к изучению фильтрующихся полугрупп появился в рамках исследования решеточных свойств полугрупп, точнее, в связи с задачей описания полугрупп с полудистрибутивными решетками подполугрупп.

Решетка $(L, \wedge, \vee)$ называется $\wedge$-полудистрибутивной, если она удовлетворяет условию $(SD_\wedge)$ Йонссона [3]:

$$a \wedge b = a \wedge c \Rightarrow a \wedge (b \vee c) = a \wedge b.$$

Двойственно определяются $\vee$-полудистрибутивные решетки. Для краткости полугруппу будем называть $\wedge$-полудистрибутивной или $\vee$-полудистрибутивной, если ее решетка подполугрупп обладает соответствующим свойством. Описание $\wedge$-полудистрибутивных полугрупп было получено автором в работе [22] и оно оказалось близким к описанию полугрупп с дистрибутивными решетками подполугрупп, найденному Л. Н. Шевриным [8] и M. Ego [16]. По другому пути идет исследование $\vee$-полудистрибутивных полугрупп. В работе [11] установлено, что всякая фильтрующаяся полугруппа является $\vee$-полудистрибутивной, отсюда и из сказанного в п. 1° следует, что класс $\vee$-полудистрибутивных полугрупп содержит весьма отличающиеся по своим свойствам полугруппы. Поэтому безуспешно искать описание полугрупп этого класса, аналогичное описанию в [22] $\wedge$-полудистрибутивных полугрупп.

С другой стороны, можно показать (это — тема другой работы), что каждая конечная комбинаторная (т. е. без нетривиальных подгрупп) $\vee$-полудистрибутивная полугруппа является фильтрующейся и что любая конечная $\vee$-полудистрибутивная полугруппа получается из некоторой конечной комбинаторной фильтрующейся полугруппы заменой идемпотентов на циклические группы. Таким образом, изучение конечных $\vee$-полудистрибутивных полугрупп в определенном смысле сводится к изучению конечных комбинаторных фильтрующихся полугрупп.

3°. Еще один решеточный аспект — это выполнение условия Жордана — Гёльдера для решеток подполугрупп конечных фильтрующихся полугрупп. Более того, конечные фильтрующиеся полугруппы характеризуются в классе конечных полугрупп тем свойством, что длина всякой максимальной цепи (непустых) подполугрупп равна порядку (мощности) полугруппы (предложение 1.1) и, таким образом, имеет максимальное возможное значение.

4°. Целью данной работы является характеризация класса конечных фильтрующихся полугрупп в терминах запрещенных делителей (гомоморфных образов подполугрупп). Основная теорема (теорема 2.1) утверждает, что для фильтруемости данной конечной полугруппы S необходимо и достаточно, чтобы полугруппа S не имела в качестве делителя ни одной из групп нечетного простого порядка и порядка 4, а также ни одной из полугрупп (и им двойственных) 18-элементного списка, представленного в секции 2.1. Этот список содержит четырехэлементную левую группу, четырехэлементную прямоугольную связку, пятиэлементную вполне O-простую полугруппу. Остальные 15 полугрупп этого списка имеют от четырех до девяти элементов и представляют собой (идеальные) расширения полугрупп четырех типов (двухэлементной группы, левосингулярной связки порядка 2 или 3, пятиэлементной комбинаторной полугруппы Брандта, нулевой полугруппы) при помощи полугрупп аналогичных типов.

Доказательство основной теоремы содержится в § 2. В § 1 доказывается выполнение условия Жордана—Гёльдера для решеток подполугрупп фильтрующихся полугрупп, сохранение свойства фильтруемости при гомоморфизмах конечных полугрупп и устанавливается технический критерий фильтруемости.

5°. Предполагается знакомство читателя с основными понятиями теории полугрупп и теории решеток [4], [5], [6], [3]. Ниже приводятся основные обозначения и часть определений. Некоторые определения, кроме того, содержатся в других местах текста.

Пусть X — множество, тогда $|X|$ — мощность множества X;

$\mathcal{T}_X$ — полугруппа всех его (полных) преобразований;

$\mathfrak{A}_X$ — полугруппа всех его частичных преобразований;

$\mathcal{I}_X$ — полугруппа всех его частичных взаимно однозначных преобразований;

$\mathcal{G}_X$ — группа подстановок множества X.

Пусть S — полугруппа. Если $X \subseteq S$, то $\langle X \rangle$ — подполугруппа полугруппы S, порожденная множеством X. Множество X называется *независимым*, если $x \notin \langle X \setminus \{x\} \rangle$ для каждого $x \in X$. Независимое порождающее множество полугруппы S называется ее *базисом* (неприводимый базис в смысле [14]). Полугруппа S называется *фильтрующейся* [11], [12], если любая ее подполугруппа T имеет наименьшее (по включению) порождающее множество, иначе говоря, базис, содержащийся в любом порождающем множестве подполугруппы T. Отметим, что в случае конечности S это условие равносильно условию единственности базиса в каждой непустой подполугруппе. В общем случае неясно, будет ли из существования и единственности базиса в каждой непустой подполугруппе следовать фильтруемость S. Полугруппа S называется комбинаторной [5], если все ее подгруппы тривиальны, и 2-комбинаторной, если порядок любой ее подгруппы не превосходит двух. Нетрудно видеть, что для конечной полугруппы 2-комбинаторность равносильна свойству быть C-полугруппой в смысле [9], т. е. иметь единственный образующий в любой моногенной подполугруппе. Делитель полугруппы [5], [7] — это гомоморфный образ некоторой ее подполугруппы.

Решетка подполугрупп полугруппы S обозначается $\mathrm{Sub}\, S$. Цепь $\mathcal{A} \subseteq \mathrm{Sub}\, S$ подполугрупп полугруппы S назовем *разборной*, если для некоторого ординала α она представляет собой убывающую трансфинитную последовательность $\mathcal{A} = (A_\lambda)_{\lambda<\alpha}$:

$$A_0 \supset A_1 \supset \ldots \supset A_\lambda \supset A_{\lambda+1} \supset \ldots$$

подполугрупп, причем $A_0 = S$ и для всякого $\lambda < \alpha$, если $A_\lambda \neq \varnothing$, то $|A_\lambda \setminus A_{\lambda+1}| = 1$. Через $\mathscr{M}(S)$ обозначаем множество всех максимальных подполугрупп полугруппы S, а через $E(S)$ — множество всех ее идемпотентов. Если $x \in S$, $e \in \langle x \rangle \cap E(S)$, то положим $x^0 = e$. $\Omega(S)$ обозначает сдвиговую оболочку полугруппы S, а $\Pi(S)$ — полугруппу всех пар ее внутренних сдвигов. Если V — идеальное расширение полугруппы S, то $\tau = \tau(V : S)$ — канонический гомоморфизм [13], [21] $v \mapsto \tau^v$ из V в $\Omega(S)$, где $\tau^v = (\lambda^v, \rho^v)$, λ^v: $s \mapsto vs$ — левый сдвиг, а ρ^v: $s \mapsto sv$ — правый сдвиг полугруппы S, индуцируемый элементом $v \in V$. Если T — полугруппа с нулем 0, то *функцией расширения* [13], [20] полугруппы S при помощи T называется такое отображение θ: $T \setminus \{0\} \to \Omega(S)$, что для любых x, y из $T \setminus \{0\}$

$$(xy \neq 0 \Rightarrow \theta(x)\,\theta(y) = \theta(xy)) \wedge (xy = 0 \Rightarrow \theta(x)\,\theta(y) \in \Pi(S)).$$

Следуя [10], через $\overleftarrow{S}$ обозначаем полугруппу, двойственную к полугруппе S. $S^{(0)}$ — полугруппа, получающаяся из S внешним присоединением нуля. $S^{(1)}$ понимается в аналогичном смысле. След подмножества $X \subseteq S$ есть частичная алгебра с носителем X и операцией частичного умножения, индуцированной умножением на S. Для $a \in S$ положим, следуя [4]:

$$J_a = S^{(1)}aS^{(1)},\ I(a) = \{x \in J(a) \mid J(x) \neq J(a)\},$$

$$I_a = J_a / I(a),\quad J_a = J(a) \setminus I(a),$$

L_a, R_a, D_a — соответственно $\mathscr{L}$-класс, $\mathscr{R}$-класс, $\mathscr{D}$-класс полугруппы S, содержащий элемент a.

Если S и T — полугруппы, то $S \times T$ означает их прямое произведение, $S \approx T$ — то, что эти полугруппы изоморфны.

$\mathscr{M}(G; I, \Lambda; P)$ — риссовская полугруппа $I \times \Lambda$-матриц с сэндвич-матрицей P над группой G;

$\mathscr{M}^0(G; I, \Lambda; P)$ — риссовская полугруппа $I \times \Lambda$-матриц с сэндвич-матрицей P над группой с нулем $G^{(0)}$;

$N = \{1, 2, \ldots\}$ — множество натуральных чисел.

Для $n \in N$ положим $\Lambda_n = \{1, 2, \ldots, n\}$;

Z_n — циклическая группа порядка n;

B_n — $(n^2 + 1)$-элементная комбинаторная полугруппа Брандта;

$\overline{B}_n$ — соответствующий группоид Брандта;

R_n — n-элементная полугруппа правых нулей (правая связка);

L_n — n-элементная полугруппа левых нулей (левая связка);

O_n — $(n + 1)$-элементная полугруппа с нулевым умножением (нулевая полугруппа).

§ 1. Условие Жордана — Гёльдера и критерий фильтруемости

1.1. Лемма. *Для того чтобы полугруппа S имела наименьшее (по включению) порождающее множество, необходимо и достаточно, чтобы любая ее собственная подполугруппа содержалась в некоторой максимальной подполугруппе и чтобы для любой максимальной подполугруппы M полугруппы S множество $S \setminus M$ состояло из одного элемента.*

Доказательство. Необходимость. Пусть A — базис полугруппы, содержащийся в любом ее порождающем множестве. Сначала докажем, что любая собственная подполугруппа полугруппы S содержится в некоторой максимальной подполугруппе, т. е. решетка $\mathrm{Sub}\, S$ коатомна [3]. Для этого предположим, что B — произвольная собственная подполугруппа полугруппы S. Тогда $A \not\subseteq B$ и существует элемент $a \in A \setminus B$. Рассмотрим подполугруппу $C = \langle B \cup A \setminus \{a\}\rangle$. Если бы $a \in C$, то имели бы $A = (A \setminus \{a\}) \cup \{a\} \subseteq C$ и тогда $S = \langle A\rangle \subseteq C$. В этом случае $S = C$ и множество $B \cup A \setminus \{a\}$ есть порождающее множество для S. Теперь по свойству базиса A должно быть $A \subseteq B \cup A \setminus \setminus \{a\}$, что невозможно по определению элемента a. Так что случай $a \in C$ исключается, остается возможность $a \notin C$. Тогда по лемме Цорна существует максимальная подполугруппа M среди подполугрупп, содержащих C и не содержащих элемента a. На самом деле, M — максимальная подполугруппа полугруппы S.

Действительно, если $T \in \mathrm{Sub}\, S$ и $M \subset T$, то ввиду того, что M — максимальная среди подполугрупп со свойством $a \notin M$, должно быть $a \in T$, а так как

$$A \setminus \{a\} \subseteq C \subseteq M \subseteq T,$$

то $A = (A \setminus \{a\}) \cup \{a\} \subseteq T$, откуда следует, что $S = \langle A\rangle \subseteq T$, и, значит, $S = T$. Следовательно, $M \in \mathcal{M}(S)$. Так что решетка $\mathrm{Sub}\, S$ коатомна.

Пусть теперь M — произвольная максимальная подполугруппа полугруппы S и пусть $a \in S \setminus M$. Тогда $\langle M \cup \{a\}\rangle = S$, поэтому $A \subseteq M \cup \cup \{a\}$, так что $A \setminus M = \{a\}$. Отсюда следует, что a — единственный элемент множества $S \setminus M$.

Достаточность. Можно считать, что $|S| > 1$. По условию, $\mathcal{M}(S) \neq \varnothing$ и для каждой подполугруппы $M \in \mathcal{M}(S)$ существует элемент $a_M \in S$ такой, что $S = M \cup \{a_M\}$. Положим

$$A = \{a_M \mid M \in \mathcal{M}(S)\}.$$

Покажем, что A есть базис, содержащийся в любом порождающем множестве полугруппы S. Во-первых, $\langle A\rangle = S$, иначе если $\langle A\rangle \neq S$, то ввиду коатомности решетки $\mathrm{Sub}\, S$ существует подполугруппа $M \in \mathcal{M}(S)$, содержащая $\langle A\rangle$, что противоречит определению A. Во-вторых, если X — любое порождающее множество полугруппы S, то $A \subseteq X$, ибо иначе $a_M \notin X$ для некоторой подполугруппы $M \in \mathcal{M}(S)$, а тогда $X \subseteq S \setminus \setminus \{a_M\} = M$ и $S = \langle X\rangle \subseteq M$, что невозможно. Следовательно, A — наименьшее порождающее множество полугруппы S. Лемма доказана.

Из этой леммы и определения фильтрующейся полугруппы легко получить следующее

Предложение. *Для того чтобы полугруппа S была фильтрующейся, необходимо и достаточно, чтобы всякая максимальная цепь подполугрупп полугруппы S была разборной.*

В дальнейшем будет использоваться сформулированный исходя из этого предложения следующий признак фильтруемости конечной полугруппы.

С л е д с т в и е. *Для того чтобы конечная полугруппа была фильтрующейся, необходимо и достаточно, чтобы для любой ее собственной подполугруппы T существовал элемент $a \in S \setminus T$ такой, что множество $T \cup \{a\}$ есть подполугруппа полугруппы S.*

З а м е ч а н и е. Условие конечности в предыдущем следствии существенно. Действительно, в бесконечной моногенной полугруппе $\langle a \rangle$ для ее подполугруппы $T = \langle a^{2k} \rangle_{k \in N}$ множество $T \cup \{a^m\}$ для любого нечетного $m \in N$ не является подполугруппой, хотя полугруппа $\langle a \rangle$ является фильтрующейся. Так что условие этого следствия не является необходимым для фильтруемости произвольной полугруппы. Оно не является и достаточным, как явствует из следующего примера.

Рассмотрим полурешетку $E = \Lambda_2 \times N$, где $\Lambda_2 = \{1, 2\}$ — двухэлементная цепь, а N — упорядоченная обычным образом цепь натуральных чисел. Пусть $T \in \mathrm{Sub}\, E$, $T \neq E$. Покажем, что после добавления к T некоторого не принадлежащего T элемента из E получится подполурешетка полурешетки E.

Предположим сначала, что $(1, 1) \notin T$. Тогда $\{(1, 1)\} \cup T \in \mathrm{Sub}\, E$. Теперь пусть $(1, 1) \in T$. Предположим, что существует такое число $k \in N$, что $(1, k) \notin T$. Среди таких k выберем наименьшее и покажем, что $\{(1, k)\} \cup T$ есть подполурешетка полурешетки E. Действительно, если это не так, то существует такое число $l \in N$, что $(2, l) \in T$ и $(1, l) = (2, l)\,(1, k) \notin T$. Но это противоречит минимальности числа k. Остается предположить, что $(1, k) \in T$ для любого $k \in N$. Но тогда найдется число $l \in N$ такое, что $(2, l) \notin T$. Тогда очевидно, что множество $\{(2, l)\} \cup T$ есть подполурешетка полурешетки E. Итак, условие следствия для полугруппы E выполняется. С другой стороны, согласно теореме 3 из работы [12] решетка $\mathrm{Sub}\, E$ не является $\bigvee$-полудистрибутивной, так что E не является фильтрующейся полугруппой.

1.2. Еще одно следствие из предложения 1.1 выясняет вопрос о выполнении (бесконечного) условия Жордана — Гёльдера [3] для подполугрупповых решеток фильтрующихся полугрупп.

С л е д с т в и е. *Пусть S — произвольная фильтрующаяся полугруппа. Тогда любые две максимальные цепи в решетке $\mathrm{Sub}\, S$ равномощны.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\mathscr{C}$ — максимальная цепь непустых подполугрупп фильтрующейся полугруппы S. Покажем, что $|\mathscr{C}| = |S|$. В самом деле, согласно предложению 1.1 для некоторого ординала α цепь $\mathscr{C}$ образует убывающую трансфинитную последовательность $\mathscr{C} = (A_\lambda)_{\lambda < \alpha}$:

$$A_0 \supset A_1 \supset \ldots \supset A_\lambda \supset A_{\lambda+1} \supset \ldots,$$

причем $A_0 = S$ и для всякого ординала $\lambda < \alpha$ существует элемент $a_\lambda \in S$ такой, что $A_\lambda \setminus A_{\lambda+1} = \{a_\lambda\}$, либо A_λ — наименьший элемент цепи $\mathscr{C}$ и $A_\lambda = \{a_\lambda\}$.

Рассмотрим соответствие $\mathfrak{A}$: $A_\lambda \mapsto a_\lambda$. Надо показать, что $\mathfrak{A}$ есть биекция $\mathscr{C}$ на S. Инъективность $\mathfrak{A}$ очевидна. Для доказательства сюръективности предположим, что a — произвольный элемент полугруппы S. Пусть A есть пересечение всех подполугрупп из цепи $\mathscr{C}$, содержащих элемент a.

Ввиду того, что $\mathscr{C}$ — цепь, подполугруппа A сравнима с любой подполугруппой из $\mathscr{C}$. Поэтому ввиду максимальности цепи $\mathscr{C}$ отсюда следует, что $A \in \mathscr{C}$. Следовательно, для некоторого ординала $\lambda < \alpha$ имеем $A = A_\lambda$. Если A_λ — наименьший элемент цепи $\mathscr{C}$, то $A_\lambda = \{a\}$ и $\mathfrak{A}(A_\lambda) = a$. Иначе, по определению A должно быть $a \notin A_{\lambda+1}$ и, значит, $A_\lambda \setminus A_{\lambda+1} = \{a\}$ и $\mathfrak{A}(A_\lambda) = a$. Итак, $\mathfrak{A}$ биективно и $|\mathscr{C}| = |S|$. Следствие доказано.

Таким образом, для произвольной фильтрующейся полугруппы ее подполугрупповая решетка удовлетворяет бесконечному условию Жордана — Гёльдера.

Предложение. *Гомоморфный образ конечной фильтрующейся полугруппы есть фильтрующаяся полугруппа.*

Доказательство. Пусть $\varphi\colon S \to U$ — гомоморфизм из конечной фильтрующейся полугруппы S на полугруппу U. Для доказательства фильтруемости U рассмотрим произвольную собственную подполугруппу T полугруппы U. Ее прообраз $\varphi^{-1}(T)$ есть собственная подполугруппа фильтрующейся полугруппы S и по следствию 1.1 существует элемент $a \in S \setminus \varphi^{-1}(T)$ такой, что множество $\varphi^{-1}(T) \cup \{a\}$ есть подполугруппа полугруппы S. Но тогда множество $T \cup \{\varphi(a)\} = \varphi(\varphi^{-1}(T) \cup \cup \{a\})$ есть подполугруппа полугруппы U, причем $\varphi(a) \notin T$. Ввиду произвольности T отсюда заключаем согласно следствию 1.1, что U — фильтрующаяся полугруппа.

Замечание. Требование конечности S в этом утверждении существенно, так как, скажем, любая свободная полугруппа является фильтрующейся, в то же время, конечно, не всякий ее гомоморфный образ обладает этим свойством.

1.3. Рассмотрим следующие условия для полугруппы S, нужные в дальнейшем:

А) $\forall a, b, x, y \in S\ (ax = b \wedge by = a \wedge a \neq b \Rightarrow a, b \in \langle x, y\rangle)$;

Б) $\forall a, b, x, y \in S\ (xa = b \wedge yb = a \wedge a \neq b \Rightarrow a, b \in \langle x, y\rangle$;

В) $\forall a, b \in S \forall x, y, u, v \in S^{(1)}\ (a = xby \wedge b = uav \wedge a \neq b \Rightarrow a, b \in \in \langle x, y, u, v\rangle)$.

Следующий критерий является одним из главных инструментов в доказательстве основной теоремы данной работы.

Предложение. *Для того чтобы конечная полугруппа S была фильтрующейся, необходимо и достаточно, чтобы S была 2-комбинаторной и для нее выполнялись условия* А) *и* Б).

Доказательство. Необходимость. Пусть S — конечная фильтрующаяся полугруппа, $a, b, x, y \in S$ и пусть $a \neq b$, $ax = b$, $by = a$. Тогда $\langle a, x, y\rangle = \langle b, x, y\rangle$ и ввиду фильтруемости S должно быть

$$\langle x, y\rangle = \langle \{a, x, y\} \cap \{b, x, y\}\rangle = \langle a, x, y\rangle,$$

поэтому $a, b \in \langle x, y\rangle$. Следовательно, условие А) выполняется. Так же проверяется и условие Б). 2-комбинаторность S следует из леммы 1.3 работы [11].

Достаточность. Предварительно докажем следующую лемму.

Л е м м а. *Пусть для 2-комбинаторной конечной полугруппы S выполняются условия* А) *и* Б). *Тогда выполняется и условие* В).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $a, b \in S$, $x, y, u, v \in S^{(1)}$; $a = xby$, $b = uav$, $a \neq b$. Сначала предположим, что $x = 1$. Если при этом $u = 1$, то из $a = by$, $b = av$ ввиду условия А) вытекает, что $a \in \langle y, v\rangle \subseteq \subseteq \langle x, y, u, v\rangle$. Далее предположим, что $u \neq 1$. Допустим, что $v = 1$. Тогда $b = ua$ и для каждого $n \in N$ имеем равенства $a = u^n a y^n$, $b = = u^n b y^n$. Ввиду конечности и 2-комбинаторности S отсюда получаем

$$a = u^0 a y^0 = u^0 a = u^0 b y = u^0 b y y^0 = u^0 b y^0 y = by,$$

$$b = u^0 b y^0 = u^0 b y y y^0 = u^0 b y y^0 y = ay.$$

Поэтому благодаря А) отсюда вытекает, что $a \in \langle y\rangle \subseteq \langle x, y, u, v\rangle$. Теперь предположим, что $u \neq 1$, $v \neq 1$. Положим $c = av$. Если $c = a$, то $b = ua$ и приходим к предыдущему случаю. Если $c = b$, то $b = av$ и приходим к случаю $u = 1$. Теперь можем считать, что $c \notin \{a, b\}$. Тогда $b = = uc$, $c = av = b\,(yv)$ и приходим к предыдущему случаю $v = 1$. Случай $x = 1$ рассмотрен. Теперь можно предполагать, что $1 \notin \{x, y, u, v\}$; $ua, xb \notin \{a, b\}$. Положим $c = xb$. Тогда $a = cy$, $b = uav = uc\,(yv)$ и приходим к предыдущему случаю при $a = c$, $x = x$, $u = u$, $v = yv$. Лемма доказана.

Приступим теперь непосредственно к доказательству достаточности. Предположим, что для 2-комбинаторной конечной полугруппы S выполняются условия А) и Б). Если среди таких полугрупп есть не фильтрующаяся, то из них выберем полугруппу S наименьшей мощности. Тогда каждая собственная подполугруппа полугруппы S является фильтрующейся и согласно следствию 1.1 существует подполугруппа $M \in \mathcal{M}(S)$ и два различных элемента a и b таких, что $a, b \in S \setminus M$. Благодаря максимальности M должны выполняться равенства:

$$\langle M \cup \{a\}\rangle = S = \langle M \cup \{b\}\rangle. \tag{1}$$

Поэтому $a \in S^{(1)} b S^{(1)}$, $b \in S^{(1)} a S^{(1)}$ и $a \mathcal{D} b$. Для каждого $c \in S \setminus M$ рассмотрим множество

$$M_c = M^{(1)} c M^{(1)} \setminus M.$$

Обозначим через H множество таких элементов $d \in S \setminus M$, что M_d — минимальное (по включению) среди всех множеств вида M_c, $c \in S \setminus M$.

Предположим сначала, что $|M_d| > 1$ для некоторого $d \in H$. Тогда существует $e \in M_d$, $e \neq d$, и из включений

$$M^{(1)} e M^{(1)} \subseteq M^{(1)} M^{(1)} d M^{(1)} M^{(1)} \subseteq M^{(1)} d M^{(1)}$$

следует, что $M_e \subseteq M_d$ и $M_e = M_d$ ввиду минимальности M_d. Отсюда вытекает, что $d = xey$, $e = udv$ для некоторых $x, y, u, v \in M^{(1)}$. Это дает $d \in \langle x, y, u, v\rangle \subseteq M^{(1)}$, если использовать лемму 1.3 и получаем противоречие с тем, что $d \in S \setminus M$. Таким образом,

$$\forall d \in H\ (M_d = \{d\}). \tag{2}$$

Допустим, что $|H| > 1$. В этом случае для некоторых $a, b \in S \setminus M$ имеем $a \neq b$, $M_a = \{a\}$, $M_b = \{b\}$ и согласно (1) существуют элементы

$m_1, \ldots, m_{s+1}, n_1, \ldots, n_{t+1} \in M^{(1)}$, $s, t \in N$, такие, что

$$a = m_1 b \ldots m_t b m_{t+1}, \quad b = n_1 a \ldots n_t a n_{t+1}. \tag{3}$$

Будем считать, что возможное для таких разложений число $t + s$ — наименьшее. Отсюда следует, что

$$m_1 b, m_2 b, \ldots, m_{s-1} b, m_s b m_{s+1} \notin M,$$
$$n_1 a, n_2 a, \ldots, n_{t-1} a, n_t a n_{t+1} \notin M.$$

Но тогда из условия (2) имеем

$$m_1 b = \ldots = m_s b m_{s+1} = b, \quad n_1 a = \ldots = n_t a n_{t+1} = a.$$

Следовательно, согласно (3) получаем равенства:

$$a = b^s, \quad b = a^t. \tag{4}$$

Так как $a \neq b$, то $s > 1$. Из (4) следует, что $\langle a \rangle = \langle b \rangle$ и это есть подгруппа полугруппы S. По предположению она должна быть двухэлементной, что противоречит тому, что a и b — ее порождающие элементы. Случай $|H| > 1$ рассмотрен.

Теперь можем предположить, что $H = \{a\}$ для некоторого $a \in S \setminus M$. Тогда $M_a = \{a\}$ — наименьшее среди всех множеств вида M_d, $d \in S \setminus M$. Рассмотрим произвольный элемент $b \in S \setminus M$, $b \neq a$. Разложения вида (3) имеют место для a и b, причем из-за $a \in M_a \subseteq M_b \subseteq M^{(1)} b M^{(1)}$ можно считать, что $s = 1$. Если t выбрано наименьшим, то снова, как и выше, имеем $n_1 a, n_2 a, \ldots, n_t a n_{t+1} \notin M$, откуда согласно (2) получаем $n_1 a = n_2 a = \ldots = n_t a n_{t+1} = a$, поэтому $a = m_1 b m_2$, $b = a^t$. Теперь, благодаря устойчивости конечной полугруппы [5, гл. 2] имеем $a \mathscr{H} b$ и ввиду 2-комбинаторности S тогда $\langle a \rangle = \{a, b\}$ — двухэлементная подгруппа. Так что $a = m_1 b m_2 = m_1 a a m_2$ и, следовательно, либо $m_1 a \notin M$, либо $a m_2 \notin M$. В первом случае ввиду $M_a = \{a\}$ имеем $m_1 a = a$ и $a = m_1 a a m_2 = a^2 m_2 = b m_2$, поэтому $b = a^2 = a b m_2 = a m_2$ и $b = a$, так как $M_a = \{a\}$. Получаем противоречие, показывающее, что S — фильтрующаяся полугруппа. Аналогично, если $a m_2 \notin M$. Это завершает доказательство предложения.

Следствие. *Всякая конечная полугруппа с тривиальными $\mathscr{D}$-классами является фильтрующейся. В частности, синтаксические моноиды кусочно тестируемых языков* [5] *являются фильтрующимися полугруппами.*

Замечание. Утверждение о единственности базиса конечного моноида с тривиальными $\mathscr{D}$-классами доказано также в работе [15].

Пример. Рассмотрим полурешетку $E = \Lambda_2 \times N$, которая была использована в замечании 1.1. E не является фильтрующейся полугруппой, в то же время она комбинаторна и ее отношения Грина тривиальны. Таким образом, требование конечности полугруппы S в предложении 1.3 и следствии 1.3 существенны. Условия А), Б), В) и 2-комбинаторность являются необходимыми условиями фильтруемости произвольной полугруппы, но не достаточными даже в случае их одновременного выполнения.

1.4. Следствие. *Для того чтобы конечная полугруппа S была фильтрующейся, необходимо и достаточно, чтобы всякая ее подполугруп-*

па с порождающим множеством, состоящим не более, чем из трех элементов, была фильтрующейся.

З а м е ч а н и е. Из примера 1.3 и фильтруемости конечной полурешетки следует, что условие конечности полугруппы S в этом следствии существенно.

1.5. В доказательстве основной теоремы еще потребуется

Л е м м а. *Пусть S — конечная полугруппа, для которой выполняются следующие условия:*

1) *След всякого регулярного $\mathcal{D}$-класса есть либо сингулярная связка, либо двухэлементная группа, либо группоид Брандта $\widetilde{B}_2$.*

2) *S порождается некоторым $\mathcal{D}$-классом, след которого есть группоид Брандта $\widetilde{B}_2$.*

Тогда существует идеальный ряд

$$U_1 \subseteq U_2 \subset S, \tag{5}$$

где U_1 — ядро [6] полугруппы S, являющееся либо сингулярной связкой, либо двухэлементной группой, фактор-полугруппа S/U_2 изоморфна полугруппе Брандта B_2, фактор-полугруппа U_2/U_1 нильпотентна.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $D_e = \{e, f, g, h\}$ есть $\mathcal{D}$-класс полугруппы S, удовлетворяющей условиям 1), 2) и пусть $\langle D_e \rangle = S$, причем выполняются условия:

$$e = e^2 = gh, \quad f = f^2 = hg, \quad eg = g = gf, \; fh = h = he;$$
$$g^2, h^2, fe, ef, fg, ge, eh, hf \in I(e). \tag{6}$$

Рассмотрим идемпотент $u = g^0$. Сначала покажем, что D_u есть ядро полугруппы S, являющееся либо сингулярной связкой, либо двухэлементной группой. Ввиду условия 1) требуется исключить возможность, когда D_u — группоид Брандта $\widetilde{B}_2$. Предположим, от противного, что D_u — группоид Брандта $\widetilde{B}_2$. Согласно (6) имеем

$$u = g^0 = eg^0 = ghg^0,$$

откуда получаем, что $hg^0 \in D_u$. Далее, из равенства $hg^0g^0 = hg^0$ следует, что либо $hg^0 = g^0$, либо hg^0 — не идемпотент в D_u. В первом случае ввиду $gg^0 = g^0$ имеем $\langle g, h\rangle g^0 = \{g^0\}$, что противоречит таблице умножения для группоида Брандта $\widetilde{B}_2$. Следовательно, приходим к тому, что $hg^0 \neq g^0$ и hg^0 — не идемпотент в D_u. Тогда благодаря комбинаторности $\langle g\rangle$ и согласно (6) имеем

$$g^0 = g^0g = g^0eg = g^0ghg = g^0hgg^0 = g^0(hg^0)$$

и опять получаем противоречие с таблицей умножения для группоида Брандта $\widetilde{B}_2$.

Итак, D_u есть либо двухэлементная группа, либо сингулярная связка. Рассмотрим эти две возможности отдельно и покажем, что D_u есть ядро полугруппы S, содержащее все идемпотенты идеала $I(e) = S \setminus D_e$.

а) $D_u = \{u, v\}$ — группа, где $u = g^0 = v^2$, $uv = vu = v$. Согласно (6) имеем равенства:

$$ev = eg^0v = g^0v = uv = v, \quad vf = vuf = vg^0f = vg^0 = v. \tag{7}$$

Отсюда выводим $ev = ghv = v$, поэтому $hv \in D_u$. Предположим, что $hv = v$; тогда, используя (7), получаем

$$v = ev = ghv = gv.$$

Так как $S = \langle g, h \rangle$, то для каждого $z \in S$ имеем $zv = v$, что невозможно поскольку

$$v^2 = vv = u \neq v = uv.$$

Следовательно, должно быть $hv = u$. Из (7) тогда выводим

$$v = ev = ghv = gu = gg^0.$$

Значит, $D_u = \{g^0, gg^0\}$. Поэтому $gv = g^2g^0 = g^0$. Теперь, используя (6), получаем $gg^0f = g^0g = g^0ghg = g^0eg$, откуда $g^0e \in \{g^0, g^0g\}$. Если $g^0e = g^0g$, то

$$v = g^0g = g^0eg = g^0gg = g^0 = u,$$

что невозможно, так что $g^0e = g^0$. Следовательно,

$$g^0h = g^0ggh = g^0ge = gg^0, \quad gg^0h = ggg^0 = g^0.$$

Далее, используя равенство $hv = u$, имеем $hu = hvv = uv = v$. Мы приходим к тому, что D_u есть идеал полугруппы S, а так как это — подгруппа, то D_u — ядро полугруппы S. Для окончания разбора этого случая надо еще показать, что всякий не содержащийся в D_e идемпотент будет содержаться в D_u.

Для этого предположим, что $x = x^2 \in S \setminus D_e$, $x \notin D_u$ и придем к противоречию. Так как $x = x^2$ и ввиду соотношений (6) либо $x \in S^{(1)}g^2$, либо $x \in S^{(1)}h^2$.

Сначала предположим, что для некоторого $y \in S^{(1)}$ выполняется равенство $x = yg^2$. Так как $x = x^2$, отсюда имеем $x = x^2 = yg^2x$, поэтому $g^2x\mathscr{D}x$. Если $g^2x = x$, то $x = g^2x = \ldots = g^{2^n}x$ для любого $n \in N$, поэтому $x \in \{xg^0, xg^0g\} \subseteq D_u$ ввиду того, что D_u — идеал. Тогда $x = u$. Теперь пусть $g^2x \neq x$. Если $gx = x$, то снова приходим к тому, что $x \in D_u$. Если $g^2x = gx$, то $gx = g^2x = \ldots = g^0x$ и ввиду $x\mathscr{D}gx$ имеем $x \in D_u$. Осталось рассмотреть возможность, когда все элементы x, gx, g^2x различны. Отсюда следует, что D_x не может быть двухэлементной группой. Так как x является для gx и g^2x правой единицей, то D_x не может быть группоидом Брандта $\widetilde{B}_2$. Следовательно, ввиду условия 1) D_x есть сингулярная связка, причем поскольку $gx \cdot x = gx$, это — левая связка. Теперь из равенства $gx = gx \cdot gx$ следует, что $xg \in D_x$ и

$$x = x \cdot xg = xg = xg^2 = \ldots = xg^0 \in D_u.$$

Случай $x \in S^{(1)}g^2$ рассмотрен. Пусть теперь $x \in S^{(1)}h^2$. Рассмотрим элемент h^0. Если D_{h^0} есть двухэлементная группа, то как и для D_{g^0}, доказывается, что D_{h^0} является ядром S, поэтому $D_{h^0} = D_{g^0}$ и далее доказательство того, что $x \in D_{h^0}$, проводится так же, как и выше, с заменой g на h. Если же D_{h^0} есть сингулярная связка, то D_{h^0} есть идеал S, что доказывается аналогично такому же факту относительно D_{g^0} в случае, если D_{g^0} — группа. Поэтому и так как D_{g^0} — ядро, имеем $D_{g^0} \subseteq D_{h^0}$, что приводит к противоречию. Если D_{h^0} — группоид Брандта $\widetilde{B}_2$, это снова приводит к противоречию, как и предположение, что D_{g^0} — группоид Брандта $\widetilde{B}_2$. Случай a) рассмотрен.

b) Случай, когда D_u — сингулярная связка, исследуется аналогичными средствами. Итак, имеем ряд (5), где $U_2 = S \setminus D_e$, $U_1 = D_{g^0}$ — ядро полугруппы S, которое является либо сингулярной связкой, либо группой Z_2. Фактор-полугруппа U_2/U_1 нильпотентна, так как $E(U_2) \subseteq U_1$. Лемма доказана.

Замечание. Условие конечности S в предыдущей лемме существенны, как показывает пример полугруппы S с копредставлением [5]:

$$S = \langle g, h;\ ghg = g,\ hgh = h \rangle.$$

Согласно упражнению 5 из § 2.3 книги [4] эта полугруппа имеет единственный регулярный $\mathscr{D}$-класс $\{g, h, gh, hg\}$. След этого $\mathscr{D}$-класса есть группоид Брандта $\widetilde{B}_2$ и он порождает S, так что условия 1) и 2) выполняются. Однако идеальный ряд вида (5) не существует.

§ 2. Характеризация класса конечных фильтрующихся полугрупп с помощью запрещенных делителей

2.1. Полугруппу S назовем *минимальной нефильтрующейся*, если S не является фильтрующейся, а все ее собственные делители являются фильтрующимися полугруппами. |

Ввиду того, что свойство быть конечной фильтрующейся полугруппой сохраняется при гомоморфизмах (предложение 1.2), то среди делителей произвольной не фильтрующейся полугруппы обязательно должна находиться минимальная нефильтрующаяся полугруппа, поэтому характеризация класса конечных фильтрующихся полугрупп с помощью запрещенных делителей (индикаторное представление [10] этого класса) сводится к описанию минимальных нефильтрующихся полугрупп. Ниже представлен список некоторых из них.

Полугруппы задаются или в виде прямых произведений известных полугрупп, или как риссовские полугруппы матричного типа, или таблицами Кели. В последнем случае ради экономии места вместо таблицы записываем равенства вида $xy = z$, где $z \neq 0$ (0 — нуль полугруппы). Обозначение $\left(\frac{A}{B}\right)$ вводим для полугруппы, являющейся идеальным расширением полугруппы B при помощи полугруппы A.

1) $ZL = Z_2 \times L_2$;

2) $LR = L_2 \times R_2$;

3) $A_2 = \mathscr{M}^0\left(Z_1; \Lambda_2, \Lambda_2; \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right)$;

4) $\left(\frac{Z_2^{(0)}}{Z_2}\right) = \{a, b, c, d \mid a = ab = ba,\quad b = a^2 = b^2,\quad c = cb = bc = ad = da = c^2 = d^2,\ d = ca = ac = db = bd = dc = cd\}$;

5) $\left(\frac{Z_2^{(0)}}{L_2}\right) = \{a, b, c, d \mid a = ba = ab,\quad b = a^2 = b^2,\quad c = bc = ca = ad = cb = c^2 = cd,\ d = ac = bd = da = db = dc = d^2\}$;

6) $\left(\frac{L_2^{(0)}}{L_2}\right) = \{a, b, c, d \mid a = a^2 = ab,\quad b = ba = b^2,\quad c = ac = ad = ca = cb = c^2 = cd,\ d = bc = bd = da = db = dc = d^2\}$;

7) $\left(\frac{B_2}{L_3}\right) = \{a, b, c, d, e, f, g \mid a = a^2 = cb, \quad b = ba = db, \quad c = ac = cd, \quad d = d^2 = bc, \quad e = ae = cg = ea = eb = ec = ed = e^2 = ef = eg, f = ab = ad = af = ag = b^2 = bd = bf = f^2 = bg = ca = c^2 = ce = cf = da = dc = de = fa = fb = fc = fd = fe = fg, \quad g = gd = ga = gb = gc = ge = gf = g^2\}$;

8) $\left(\frac{Z_2^{(0)}}{O_2}\right)_1 = \{a, b, c, d, 0 \mid a = ab = ba, \quad b = b^2 = a^2, \quad c = ca = cb = bc = ad, \ d = ac = bd = da = db\}$;

9) $\left(\frac{Z_2^{(0)}}{O_2}\right)_2 = \{a, b, c, d, 0 \mid a = ab = ba, \quad b = b^2 = a^2, \quad c = ad = bc = cb = da, \ d = ac = bd = ca = db\}$;

10) $\left(\frac{Z_2^{(0)}}{O_2}\right)_3 = \{a, b, c, d, 0 \mid a = ab = ba, \ b = b^2 = a^2, \ c = ad = bc, \ d = ac = bd\}$;

11) $\left(\frac{Z_2^{(0)}}{O_3}\right) = \{a, b, c, d, e, 0 \mid a = a^2 = b^2, \ b = ab = ba, \ c = ac = bd, \ d = bc = ad, \quad e = ae = be = ca = cb = da = db = ea = eb\}$;

12) $\left(\frac{L_2^{(0)}}{O_2}\right)_1 = \{a, b, c, d, 0 \mid a = a^2 = ab, \ b = ba = b^2, \ c = ac = ad = ca = cb, \ d = bc = bd = da = db\}$;

13) $\left(\frac{L_2^{(0)}}{O_2}\right)_2 = \{a, b, c, d, 0 \mid a = a^2 = ab, \ b = ba = b^2, \ c = ac = ad, \ d = bc = bd\}$;

14) $\left(\frac{B_2^{(0)}}{O_2}\right) = \{a, b, c, d, e, f, g, 0 \mid a = a^2 = cb, \ b = ba = db, \ c = ac = cd, d = bc = d^2, e = ab = ae = ad = b^2 = bd = be = ca = c^2 = ce = dc = de = eb = ec = ed = e^2, \quad f = af = cg = fa = fb = fc = fe, \quad g = bf = dg = ga = gb = gc = gd = ge\}$;

15) $\left(\frac{B_2}{O_2}\right) = \{a, b, c, d, e, f, 0 \mid a = ab = ca, \ b = b^2 = da, \ c = ad = c^2, \ d = bd = dc, \ e = af = ce, \ f = bf = de\}$;

16) $\left(\frac{B_2}{O_4}\right) = \{a, b, c, d, e, f, g, h, 0 \mid e = e^2 = gh, \ f = f^2 = hg, \ g = gf = eg, \quad h = fh = he, \quad a = fa = hb = ch = ae, \quad b = be = eb = ga = dh, \ c = ag = fc = hd = cf, \ d = ed = gc = df = bg\}$;

17) $\left(\frac{Z_2^{(0)}}{B_2}\right) = \{a, b, c, d, e, f, 0 \mid a = ab = ba, \ b = a^2 = b^2, \ c = ad = bc = cb = c^2 = ea = ed, \ f = ae = bf = da = de = fb = f^2, \ g = ac = bd = db = dc = fa = fd, \ e = af = be = ca = ce = eb = ef\}$;

18) $\left(\frac{B_2}{B_2}\right) = \{a, b, c, d, e, f, g, h, 0 \mid a = ab = ca, \ b = b^2 = da, \ d = bd = dc, \quad c = ad = c^2, \quad e = af = ce = eb = ef = ga = ge, \quad f = bf = de = fb = f^2 = ha = he, \quad g = ah = cg = ed = eh = gc = g^2, \quad h = bh = dg = fd = fh = hc = hg\}$.

Основной результат данной работы состоит в следующем утверждении.

Т е о р е м а. *Для того чтобы конечная полугруппа была фильтрующейся, необходимо и достаточно, чтобы она не имела в качестве делителя ни одной из групп нечетного простого порядка или групп порядка 4, а также ни одной из полугрупп* 1) — 18) *представленного выше списка и ни одной из антиизоморфных им полугрупп.*

2.2. Т е о р е м а. *Для того чтобы конечная полугруппа S была мини-*

мальной нефильтрующейся, необходимо и достаточно, чтобы S была либо изоморфна группе нечетного простого порядка или группе порядка 4, либо изоморфна или антиизоморфна одной из полугрупп 1) — 18) *представленного выше списка.*

Как следует из сказанного в начале этого параграфа, доказательство теоремы 2.1 сводится к доказательству теоремы 2.2.

Доказательство теоремы 2.2. Достаточность. Пусть S — одна из полугрупп, указанных в формулировке теоремы. Сначала предположим, что S — группа. Тогда $|S| \geqslant 3$ и S не является фильтрующейся полугруппой, так как среди групп только Z_1 и Z_2 — фильтрующиеся полугруппы [11]. В то же время только эти группы могут быть собственными делителями групп простого порядка $p > 2$ или порядка 4. Следовательно, S — минимальная нефильтрующаяся полугруппа. Пусть теперь S — не группа и вполне проста (0-проста), т. е. S — одна из полугрупп 1) — 3) или ей двойственная. Из следствия 1.10 работы [11] следует, что всякая конечная фильтрующаяся полугруппа должна удовлетворять условию 1) леммы 1.4, поэтому полугруппа S не является фильтрующейся. Пусть теперь T — собственный делитель полугруппы S. Так как $|S| \leqslant 5$, то $|T| \leqslant 4$. Из предложения 1.1 легко следует, что все двухэлементные полугруппы являются фильтрующимися, а на основании предложения 1.3 можно вывести, что среди трехэлементных полугрупп лишь группа Z_3 не является фильтрующейся, а такой группы нет среди делителей S. Если $|T| = 4$, то $|S| = 5$ и $S = A_2$ или $S = \overleftarrow{A}_2$. Не нарушая общности ограничимся случаем $S = A_2$. Можно считать, что $A_2 = \{(11), (12), (21), (22), 0\}$, где для $i, j, k, l \in \Lambda_2 = \{1, 2\}$

$$(ij)(kl) = \begin{cases} (il), & \text{если } j = k \text{ или } j = 1, \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases}$$

Тогда $T \in \operatorname{Sub} S$, $T = S \setminus \{(21)\}$. Эта полугруппа имеет единственный базис. Таким образом, S — минимальная фильтрующаяся полугруппа.

Далее рассмотрим полугруппы 4) — 18), которые являются идеальными расширениями полугрупп вида Z_2, L_2, L_3, O_2, O_3, O_4 при помощи полугрупп вида $Z_2^{(0)}$, $L_2^{(0)}$, B_2, $B_2^{(0)}$. Из таблиц умножения для этих полугрупп видно, что у них нарушается хотя бы одно из условий А), Б) секции 1.3, поэтому согласно предложению 1.3 все они — не фильтрующиеся полугруппы. Эти полугруппы 2-комбинаторны, поэтому, как сказано выше, все собственные делители четырехэлементных полугрупп 4)—6) являются фильтрующимися. Для остальных полугрупп 7)—18) благодаря предложению 1.2 достаточно проверить, что всякий собственный гомоморфный образ и всякая максимальная подполугруппа суть фильтрующиеся полугруппы. Это можно проделать, исходя из таблицы умножения и используя предложение 1.3.

Например, рассмотрим полугруппу типа $\left(\frac{B_2}{L_3}\right)$ и обозначим ее через S. Исходя из таблицы умножения, находим, что единственной парой разрешимых уравнений (относительно x и y) вида $ux = v$, $vy = u$ или $xu = v$, $yv = u$, где u, v — не решения, являются уравнения вида $xe = g$, $yg = e$, причем здесь $x = b$, $y = c$. Так как $e, g \notin \langle b, c\rangle = \{a, b, c, d, f\}$, то условие Б) нарушается. Ввиду того, что $\langle b, c, e, g \rangle = S$, отсюда следует, что всякая максимальная подполугруппа полугруппы S является фильтрующейся. Далее, предположим, что φ есть гомоморфизм из S на T и пусть условие А) или Б) нарушается для T. В этом случае обязательно $\varphi(e) \neq \varphi(g)$. Если $\varphi(b) = \varphi(c)$, то

$$\varphi(d) = \varphi(bc) = \varphi(b)\varphi(c) = \varphi(b)^2 = \varphi(f) = \varphi(ab) =$$
$$= \varphi(a)\varphi(b) = \varphi(a)\varphi(c) = \varphi(ac) = \varphi(c) = \varphi(f) = \varphi(f)\varphi(f) =$$
$$= \varphi(c)\varphi(b) = \varphi(bc) = \varphi(a).$$

Но тогда $|\varphi(S)| \leqslant 3$ и T — фильтрующаяся полугруппа. Пусть теперь $\varphi(b) \neq \varphi(c)$. Тогда полугруппа $\langle \varphi(b), \varphi(c) \rangle$ есть полугруппа Брандта B_2 и, если бы $\varphi(e) \in \langle \varphi(b), \varphi(c) \rangle$, то $\varphi(g) \in \langle \varphi(b), \varphi(c) \rangle$, что невозможно, так как $\{\varphi(e), \varphi(g)\}$ — нетривиальная левая связка. Поэтому $|\varphi(S)| = 7$ и φ — изоморфизм. Итак, всякий нетривиальный гомоморфный образ полугруппы S есть фильтрующаяся полугруппа. Аналогично проверяются и остальные полугруппы из вышеприведенного списка.

Необходимость. Пусть S — минимальная нефильтрующаяся полугруппа. Если S — группа, то $|S| > 2$ и лишь группы Z_1 и Z_2 могут быть ее собственными делителями. Следовательно, либо $|S|$ — простое число, либо $|S| = 4$. Далее предполагаем, что S не является группой.

Доказательство того, что S изоморфна или антиизоморфна одной из полугрупп 1)—18), разобьем на две части. В первой части α) будем обсуждать случай, когда S — вполне проста или вполне 0-проста, во второй части β) — случай, когда S имеет более одного нетривиального главного фактора, их должно быть точно два — тех, соответствующие которым $\mathscr{D}$-классы порождают полугруппу S. Возможности для этих $\mathscr{D}$-классов определяются согласно следствию 1.10 из работы [11] и в соответствии с этим происходит разбиение случая β) на подслучаи $\beta\alpha$), $\beta\beta$) и т. д.

α) Пусть S — вполне простая или вполне 0-простая полугруппа. Тогда S изоморфна или полугруппе вида $\mathscr{M}(G; I, \Lambda; P)$ или вида $\mathscr{M}^0(G; I, \Lambda; P)$.

$\alpha\alpha$) Пусть сначала $|I| = |\Lambda| = 1$. Тогда S есть группа с нулем $G^{(0)}$ и ввиду минимальности S тогда $G \approx Z_1$ или $G \approx Z_2$. Но это приводит к фильтруемости S.

$\alpha\beta$) Далее, не нарушая общности, можно предположить, что $|I| \geqslant 2$.

$\alpha\beta\alpha$) Пусть $|G| > 1$. Так как G — подгруппа полугруппы S, являющаяся фильтрующейся, то $G \approx Z_2$. В этом случае существует гомоморфизм из S на риссовскую комбинаторную полугруппу T матричного типа с сэндвич-матрицей P', получающейся из матрицы P заменой каждого группового элемента на единичный элемент 1 группы G. Так как T благодаря минимальности S должна быть фильтрующейся, то согласно предложениям 1.7 и 1.8 работы [11] должно быть либо $|\Lambda| = 1$, либо $P' = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, либо $P' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$. Как легко проверить, полугруппа $\mathscr{M}^0(Z_2; \Lambda_2, \Lambda_1; [10])$ не является фильтрующейся, поэтому остается возможность $|\Lambda| = 1$. Следовательно, $S \approx L_n \times Z_2$ или $S \approx (L_n \times Z_2)^{(0)}$, где $n \geqslant 2$. Так как $L_n \times Z_2$ — не фильтрующаяся полугруппа при $n \geqslant 2$, то приходим к тому, что $S \approx L_2 \times Z_2$, т. е. S — типа LZ.

$\alpha\beta\beta$) Теперь пусть $|G| = 1$, $|I| \geqslant 2$.

$\alpha\beta\beta\alpha$) Если $|\Lambda| = 1$, то S — правая связка, может быть, с внешне присоединенным нулем, тогда S — фильтрующаяся полугруппа, что приводит к противоречию.

$\alpha\beta\beta\beta$) Пусть теперь $|\Lambda| \geqslant 2$. Нетрудно выяснить, что полугруппа $\mathscr{M}^0(Z_1;\ \Lambda_n,\ \Lambda_2;\ P')$, где $P' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, или $P' \in \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \right\}$, не является фильтрующейся, поэтому исходная матрица P не должна иметь подматриц такого вида (и меньшего размера) или получающихся из них перестановками строк и столбцов. Это может быть лишь когда $|I| = 2$, $|\Lambda| = 2$ и P содержит не более одного нуля, т. е. S изоморфна или A_2, или $\overleftarrow{A}_2$, или $L_2 \times R_2$.

Случай α) рассмотрен.

β) Пусть теперь S не является вполне простой (0-простой) полугруппой. Тогда для каждого $a \in S$ главный фактор I_a есть собственный делитель S и потому должен быть фильтрующейся полугруппой. Согласно следствию 1.10 работы [11] либо I_a — нулевая полугруппа или полугруппа Брандта B_2, либо след $\mathscr{D}$-класса D_a есть сингулярная связка или группа Z_2. Так как S не является фильтрующейся, то согласно предложению 1.3 для S должно нарушаться либо условие А), либо условие Б). Для определенности пусть нарушается условие Б). Тогда для некоторых a, b, x, $y \in S$

$$xa = b,\ yb = a,\ a \neq b, \tag{8}$$

и при этом $a \notin \langle x, y\rangle$. Отсюда следует, что полугруппа $\langle a, x, y\rangle$ не является фильтрующейся, поэтому $S = \langle a, x, y\rangle$. Далее, из соотношений (8) получаем

$$a = (yx)^0 a = (yx)^0 yb,\ b = (xy)^0 b = (xy)^0 xa. \tag{9}$$

Отсюда следует, что полугруппа $\langle a, (xy)^0 x, (yx)^0 y\rangle$ не является фильтрующейся и потому совпадает с S. Значит, можно считать, что

$$y = (yx)^0 y,\ x = (xy)^0 x. \tag{10}$$

Отсюда видно, что $x\mathscr{D}y$ и что $\mathscr{D}$-класс D_x регулярен. Кроме того, из (9) следует, что $J(a) = J(b) \subseteq J(x)$ и либо $J(a) = D_a$, либо $I(a) \neq \varnothing$ и фактор-полугруппа $S/I(a)$ не является фильтрующейся. В этом последнем случае из минимальности S следует, что $I(a) = \{0\}$ и $J(a) = D_a \cup \{0\}$. Из сказанного выше вытекает, что D_x может быть или сингулярной связкой, или двухэлементной группой, или группоидом Брандта $\widetilde{B}_2$. Для D_a могут быть такие же возможности и, кроме того, $J(a)$ может быть нулевой полугруппой. В случае, если D_x — подполугруппа, из $J(a) \subseteq J_x$ вытекает, что множество $D_x \cup J(a)$ есть подполугруппа, не являющаяся фильтрующейся, а, значит, $S = D_x \cup J(a)$. Иначе, т. е. если D_x — группоид Брандта $\widetilde{B}_2$, то $S = \langle D_x\rangle \cup J(a)$.

В соответствии с этими возможностями для $\mathscr{D}$-классов D_x и D_a далее доказательство разбивается на подслучаи $\beta\alpha$), $\beta\beta$) и т. п. Введем еще обозначения для элементов этих $\mathscr{D}$-классов в соответствии с перечисленными возможностями, когда эти $\mathscr{D}$-классы являются группоидами Брандта. Именно, если D_x — двухэлементная группа, то пусть $D_x = \{g, e\}$, причем

$$e^2 = e = g^2, \; eg = ge = g. \tag{11}$$

Если D_a — двухэлементная группа, то пусть $D_a = \{u, v\}$, где

$$u^2 = u = v^2, \; uv = vu = v. \tag{12}$$

Если D_x — группоид Брандта $\tilde{B}_2$, то пусть $D_x = \{e, f, g, h\}$, где $e = e^2 = gh$, $f = f^2 = hg$,

$$fh = h = he, \; eg = g = gf;$$
$$ef, fe, eh, hf, ge, fg, g^2, h^2 \notin D_x. \tag{13}$$

Если D_a — группоид Брандта $\tilde{B}_2$, то пусть $D_a = \{u, v, t, s\}$, где $u = u^2 = ts$, $v = v^2 = st$, $ut = t = tv$,

$$vs = s = su, \; uv = vu = us = sv = vt = tu = t^2 = s^2 = 0. \tag{14}$$

$\beta\alpha$) Пусть $D_a = \{u, v, t, s\}$ — группоид Брандта $\tilde{B}_2$, тогда $J(a) = D_a \cup \{a\}$ — полугруппа Брандта B_2. Согласно работе [20] ее сдвиговая оболочка $\Omega(J(a))$ изоморфна полугруппе $\mathcal{I}_{\Lambda_2}$, при этом $\Pi(J(a))$ соответствует подполугруппе частичных преобразований ранга $\leqslant 1$. Так что $\Omega(J(a))$ есть объединение полугруппы Брандта B_2 и двухэлементной группы. Непосредственно сравнивая таблицы умножения для $\mathcal{I}_{\Lambda_2}$ и минимальной полугруппы типа $\left(\frac{Z_2^{(0)}}{B_2}\right)$, можно убедиться, что они изоморфны.

$\beta\alpha\alpha$) Пусть D_x — двухэлементная группа или сингулярная связка. Тогда S есть расширение $J(a)$ при помощи $D_x^{(0)}$ и оно должно задаваться при помощи функции расширения, скажем, θ: $D_x^{(0)} \to \Omega(J(a))$. В этом случае $\theta|_{D_x}$ есть попросту гомоморфизм из полугруппы D_x в $\Omega(J(a))$, причем он не должен быть постоянным ввиду соотношений (8). В случае, если D_x — группа Z_2, в качестве $\theta|_{D_x}$ может быть только изоморфизм группы D_x на группу $\Omega(J(a)) \setminus \Pi(\tau(a))$ и тогда S — полугруппа типа $\left(\frac{Z_2^{(0)}}{B_2}\right)$. Если D_x — сингулярная связка, то такого гомоморфизма не может быть.

$\beta\alpha\beta$) Пусть теперь D_x — группоид Брандта $\tilde{B}_2$. Тогда $S = \langle D_x\rangle \cup J(a)$. Так как $\langle D_x\rangle$ должна удовлетворять предположениям леммы 1.4, то согласно этой лемме множество $\langle D_x\rangle \setminus D_x$ есть идеал полугруппы $\langle D_x\rangle$, являющийся нильпотентным расширением или сингулярной связки, или двухэлементной группы. Следовательно, $|\langle D_x\rangle \cap J(a)| \leqslant 1$ и S есть расширение полугруппы $J(a)$ при помощи $\langle D_x\rangle$ или $\langle D_x\rangle^{(0)}$. Рассмотрим канонический [21] гомоморфизм $\tau = \tau(s\colon J(a))\colon w \mapsto \tau^w = (\lambda^w, \rho^w)$ из S в $\Omega(J(a))$, соответствующий этому расширению. Ввиду соотношений (8) он должен быть не постоянным на D_x. Так как $\tilde{B}_2$ не имеет нетривиальных конгруэнций, то элементы τ^g и τ^h должны быть различны и не идемпотентны. При этом согласно соотношениям (13) выполняются равенства:

$$\tau^g\tau^h = \tau^e, \quad \tau^h\tau^g = \tau^f, \quad \tau^e\tau^g = \tau^g = \tau^g\tau^f, \quad \tau^f\tau^h = \tau^h = \tau^h\tau^e.$$

Ввиду того, что $\Omega(J(a))$ есть полугруппа типа $\left(\frac{Z_2^{(0)}}{B_2}\right)$, отсюда следует, что

$$\langle\tau^g, \tau^h\rangle = \Pi(J(a)) \approx B_2,$$

поэтому

$$\tau^{g^2} = \tau^{h^2} = \tau^{ef} = \tau^{fe} = \tau^{fg} = \tau^{hf} = \tau^{ge} = \tau^{eh} = \tau^0.$$

Так как

$$\langle g^2, h^2, fe, ef, hf, eh, ge, fg\rangle \subseteq \langle D_x\rangle \setminus D_x,$$

то отсюда вытекает, что идеал $\tau^{-1}(\tau^0)$ совпадает с идеалом $\langle D_x\rangle \setminus D_x$ полугруппы $\langle D_x\rangle$. Рассмотрим естественный гомоморфизм σ из S на $S/\tau^{-1}(\tau^0)$. Тогда из (8) следует, что

$$\sigma(x)\,\sigma(a) = \sigma(b),\ \sigma(y)\,\sigma(b) = \sigma(a),$$

$$\sigma(a) \neq \sigma(b),\ \sigma(a) \notin \langle\sigma(x),\ \sigma(y)\rangle,$$

поэтому полугруппа $S/\tau^{-1}(\tau^0)$ не является фильтрующейся. Минимальность S влечет одноэлементность идеала $\tau^{-1}(\tau^0)$. Это означает, что $\langle D_x\rangle = D_x \cup \{0\}$ и *поэтому* S *является расширением полугруппы* Брандта $J(a)$ при помощи полугруппы Брандта $\langle D_x\rangle$. Как видно из предыдущего, это расширение имеет функцию расширения

$$\tau\,|_{D_x}: D_x \to \Omega(J(a)),$$

причем элементы τ^g и τ^h различны и не идемпотентны в $\Pi(J(a))$. Эти элементы можно выбрать двумя способами, но в результате получатся две изоморфные полугруппы типа $\left(\frac{B_2}{B_2}\right)$.

Случай, когда D_a — группоид Брандта $\widetilde{B}_2$, рассмотрен.

$\beta\beta$) Теперь пусть $D_a = \{u, v\}$ — двухэлементная группа. Тогда $J(a) = D_a$ — ядро полугруппы S.

$\beta\beta\alpha$) Пусть D_x — сингулярная связка или двухэлементная группа. В этом случае $S = D_x \cup D_a$ и S есть расширение группы D_a при помощи полугруппы $D_x^{(0)}$. Это расширение определяется [4] некоторым гомоморфизмом θ: $D_x \to D_a$. Ввиду условия (8) этот гомоморфизм не постоянен, что возможно лишь когда $D_x \approx Z_2$ и тогда θ — изоморфизм. Нетрудно видеть, что в этом случае S есть полугруппа типа $\left(\frac{Z_2^{(0)}}{Z_2}\right)$.

$\beta\beta\beta$) $D_x = \{e, f, g, h\}$ — группоид Брандта $\widetilde{B}_2$. Из соотношений (9) и (8) следуют равенства:

$$y = y(xy)^0 = (yx)^0 y \neq (xy)^0,\ x = x(yx)^0 = (xy)^0 x \neq (yx)^0. \tag{15}$$

Если $x, y \in E(S)$, то $xy \notin D_x$, $x \neq y$, однако из (15) следует, что $xy \in D_x$ и приходим к противоречию. Если $x \in E(S)$, $y \notin E(S)$, то из $xy \in D_x$ следует согласно (13), что $xy = y$, но тогда из (15) вытекает, что $y^0 \in D_x$ — противоречие. Аналогично, если $x \notin E(S)$, $y \in E(S)$. Следовательно, x и y различны и не идемпотентны. Теперь, имея в виду (13) и (15), можем предполагать, что $g = x$, $h = y$, $e = (xy)^0$, $f = (yx)^0$. Равенства (9) тогда приводят к следующим:

$$a = fa = ha,\ b = eb = ga. \tag{16}$$

Предположим сначала, что $a^2 = a$, тогда из (16) выводим

$$a = a^2 = afa = ahb = b^2 = beb = bga,$$

$$b = ab = aeb = aga = ba = bfa = bhb.$$

Отсюда, используя закон сокращения в группе, выводим

$$af = ae = bh = bg = a, \; ah = be = ag = bf = b.$$

Следовательно,

$$aeh = b, \; beh = a. \tag{17}$$

Если $a \in \langle eh \rangle$, то $a \in \langle x, y \rangle$, что приводит к противоречию. Если $a \notin \langle eh \rangle$, то из равенств (17) вытекает согласно предложению 1.3, что $\langle a, eh \rangle$ — не фильтрующаяся полугруппа. Ввиду минимальности S тогда $S = \langle a, eh \rangle$, что невозможно, так как $\langle a, eh \rangle \subseteq S \setminus D_x$. Случай ββ) рассмотрен.

βγ) Пусть D_a — сингулярная связка. Согласно (8) $a\mathcal{L}b$ и потому D_a — левая связка.

βγα) Предположим, что D_x — сингулярная связка. Тогда есть не фильтрующаяся полурешетка сингулярных связок D_a и D_x, причем всякая ее подсвязка является фильтрующейся полугруппой. Согласно теореме 2.2 работы [11] связка S должна содержать в качестве подсвязки полугруппу, обозначаемую там через S_4, которая изоморфна $\left(\frac{L_2^{(0)}}{L_2}\right)$, или ей двойственную, а так как S минимальна и ее ядро есть левая связка, то S должна с этой подсвязкой совпадать. Значит, S — полугруппа типа $\left(\frac{L_2^{(0)}}{L_2}\right)$.

βγβ) Пусть $D_x = \{e, g\}$ — двухэлементная группа. Тогда $S = D_x \cup D_a$ — расширение связки D_a при помощи полугруппы $D_x^{(0)}$. Так как D_x — подполугруппа в $D_x^{(0)}$, это расширение определяется некоторым гомоморфизмом θ (функцией расширения) из D_x в полугруппу $\Omega(D_a)$, причем ввиду (8) гомоморфизм θ должен быть инъективен. Известно [4], что всякий правый сдвиг левой связки является тождественным отображением, а в качестве левого сдвига можно взять любое преобразование этой связки. Поэтому полугруппа $\Omega(D_a)$ изоморфна полугруппе $\mathcal{T}_{D_a}$ всех преобразований множества D_a. Ввиду инъективности θ элемент $\theta(g) = (\lambda^g, \rho^g)$ является образующим двухэлементной подгруппы в $\Omega(D_a)$, поэтому ограничение $\lambda^g|_X$ сдвига λ^g на некотором подмножестве X есть инволюция в группе $Д_X$. Ввиду соотношений (8) можно считать, что $X = \{a, b\}$ и X есть двухэлементная орбита подстановки $\lambda^g|_X$, а так как $S = \langle x, a, b \rangle$, то отсюда следует, что $D_a = X = \{a, b\}$ и

$$xa = b, \; ax = a, \; bx = b, \; xb = a, \; x^3 = x.$$

Мы приходим к полугруппе $S = \{x, x^2, a, b\}$ типа $\left(\frac{Z_2^{(0)}}{L_2}\right)$.

βγγ) Теперь предположим, что $D_x = \{e, f, g, h\}$ — группоид Брандта B_2. Тогда $S = \langle D_x \rangle \cup D_a$. Как и в случае βββ), можно предполагать, что выполняются равенства (16). Так как $J(a) = D_a$ — идеал полугруппы S, то $D_a \langle D_x \rangle \subseteq D_a$ и, так как D_a — левая связка, имеем

$$a \langle D_x \rangle = \{a\}, \; b \langle D_x \rangle = \{b\}. \tag{18}$$

Положим $U = \langle D_x \rangle \setminus D_x$. Предположим сначала, что для некоторого $u \in U$ выполняется равенство $a = ua$. Тогда из (16) выводим

$$a = ua = uhb, \; b = ga = gua.$$

Следовательно, по предложению 1.3 полугруппа $U \bigcup D_a$ не является фильтрующейся и в то же время $S \neq U \bigcup D_a$, что противоречит минимальности S. Аналогично исключаются возможности $a \in Ub$, $b \in Ub$, $b \in Ua$. Следовательно,

$$\{a, b\} \bigcap U \{a, b\} = \varnothing.$$

Рассмотрим эквивалентность τ на S, единственным, может быть, не одноэлементным τ-классом которой является множество $X = U \bigcup U \{a, b\}$. Покажем, что τ есть конгруэнция на S. Действительно, так как U — идеал полугруппы $\langle D_x \rangle$ и ввиду (18) имеем

$$\langle D_x \rangle X = \langle D_x \rangle U \{a, b\} \bigcup \langle D_x \rangle U \subseteq U\{a, b\} \bigcup U \subseteq X, \tag{19}$$

$$X \langle D_x \rangle = U \{a, b\} \langle D_x \rangle \bigcup U \langle D_x \rangle \subseteq U \{a, b\} \bigcup U = X. \tag{20}$$

Если $z \in \{a, b\}$, то ввиду того, что D_a — левая связка и согласно (18) получаем

$$Xz = (U \{a, b\} \bigcup U) z = U \{a, b\} \bigcup Uz \subseteq U \{a, b\} \subseteq X; \tag{21}$$

$$zX = zU \{a, b\} \bigcup zU = z \{a, b\} \bigcup \{z\} = \{z\}. \tag{22}$$

Следовательно, множество $\{a, b\} \bigcup X \bigcup D_x$ есть подполугруппа полугруппы S, а так как

$$S = \langle x, a, b \rangle \subseteq \{a, b\} \bigcup X \bigcup Dx,$$

то $S = \{a, b\} \bigcup X \bigcup D_x$. Из соотношений (19)—(22) следует, что τ есть конгруэнция.

Пусть ζ: $S \to S/\tau$ — естественный гомоморфизм. Если обозначить $c = \zeta (X)$, а в качестве обозначений одноэлементных τ-классов оставить обозначения соответствующих элементов, то из предыдущих рассуждений получаем $S/\tau = \{a, b, c, e, f, g, h\}$, где

$$a = ab = a^2 = ae = ag = ah = ac = fa = hb = af,$$

$$b = b^2 = ba = bc = be = bf = bg = ga = bh = eb,$$

$$c = c^2 = gc = ec = fc = cg = ch = ce = cf = ef = fe = eh = \\ = cb = ca = hf = fg = ge = g^2 = h^2 = ea = ha = fb = gb,$$

$$e = e^2 = gh,\ f = f^2 = hg,\ g = eg = gf,\ fh = h = he.$$

Следовательно, полугруппа S/τ есть типа $\left(\frac{B_2}{L_3}\right)$, поэтому ζ — изоморфизм и полугруппа S есть типа $\left(\frac{B_2}{L_3}\right)$.

Случаи, когда D_a — регулярный $\mathcal{D}$-класс, рассмотрены.

$\beta\delta$) Предположим, что $J (a)$ — нулевая полугруппа.

$\beta\delta\alpha$) Пусть D_x — двухэлементная группа или сингулярная связка. Тогда $S = D_x \bigcup J (a)$ и S есть расширение нулевой полугруппы $J (a)$ при помощи полугруппы $D_x^{(0)}$. Как и в случае $\beta\gamma\beta$), это расширение определяется некоторым гомоморфизмом (функцией расширения) θ из полугруппы D_x в $\Omega (J (a))$. Последняя полугруппа, как нетрудно видеть, изоморфна полугруппе $\mathfrak{A} (D_a) \times \overleftarrow{\mathfrak{A}(D_a)}$ пар частичных преобразований множества D_a, а ее подполугруппа $\theta (D_a)$ должна состоять из таких пар, что первая компонента одной пары должна быть перестановочна со второй компонентой любой другой пары.

$\beta\delta\alpha\alpha$) Предположим сначала, что $D_x = \{e, g\}$ — группа. Тогда гомоморфизм θ задается парой перестановочных частичных отображений $(\lambda^g|_{D_a}, \rho^g|_{D_a})$, причем согласно (8) $\lambda^g(a) = b$, $\lambda^g(b) = a$. Если $\rho^g(\{a, b\}) \subseteq \{a, b, 0\}$, то из $S = \langle x, a, b\rangle$ следует, что $S = D_x \cup \{a, b\} \cup \{0\}$. Из перестановочности сдвигов λ^g и ρ^g выводим, что для ρ^g имеются только три возможности:

$$\rho^g\colon (a, b) \mapsto (b, a),\ \rho^g\colon (a, b) \mapsto (a, b),\ \rho^g\colon (a, b) \to (0, 0).$$

В соответствии с этим получаем, что S имеет один из типов: $\left(\frac{Z_2^{(0)}}{O_2}\right)_1$, $\left(\frac{Z_2^{(0)}}{O_2}\right)_2$, $\left(\frac{Z_2^{(0)}}{O_2}\right)_3$.

Предположим теперь, что $\rho^g(a) \notin \{a, b, 0\}$. Положим $c = \rho^g(a)$, $d = \rho^g(b)$. Так как

$$\lambda^g(c) = \lambda^g\rho^g(a) = \rho^g\lambda^g(a) = \rho^g(b) = d,$$
$$\lambda^g(d) = \lambda^g\rho^g(b) = \rho^g\lambda^g(b) = \rho^g(a) = c, \qquad (23)$$

то $c\mathcal{L}d$ и $d \in D_a$, $d \notin \{a, b\}$.

Если $\rho^e(a) = a$, то $\rho^g(c) = a$ и $\rho^e(b) = \rho^e\lambda^e(a) = \lambda^e\rho^e(a) = \lambda^g(a) = b$, поэтому $\rho^g(d) = b$. Отсюда следует, что $d \notin \{a, b, c\}$. Тогда $S = \langle x, a, b\rangle = \{g, e, a, b, c, d, 0\}$. Нетрудно проверить, что эквивалентность σ, соответствующая разбиению $\{g\}$, $\{e\}$, $\{a, d\}$, $\{b, c\}$, $\{0\}$, является конгруэнцией и фактор-полугруппа S/σ изоморфна нефильтрующейся полугруппе $\left(\frac{Z_2^{(0)}}{O_2}\right)_2$, что противоречит минимальности S.

Пусть теперь $\rho^e(a) \neq a$. Если $c \neq d$, то ввиду (23)

$$\rho^e(c) = \rho^g\rho^g(a) = \rho^g(d) = c$$

и мы приходим к одной из предыдущих ситуаций при $a = c$, $b = d$.

Теперь предположим, что $c = d$. Тогда согласно (23) $\lambda^g(c) = c$, $\lambda^e(c) = c$. Если $\rho^g(c) = c$, то $S = \{a, b, c, g, e\}$ и из предыдущих соотношений легко видеть, что S — полугруппа типа $\left(\frac{Z_2^{(0)}}{O_3}\right)$. Если $\rho^g(c) \neq c$, то

$$\rho^e(c) = \rho^e\rho^g(a) = \rho^g(a) = c \text{ и } \lambda^e\rho^g(c) = \rho^g(c),\ \lambda^g\rho^g(c) = \rho^g(c).$$

В этом случае $S = \{a, b, c, \rho^g(c), e, g, 0\}$ и эквивалентность σ с неодноэлементным σ-классом $\{c, \rho^g(c)\}$ есть конгруэнция, при этом фактор-полугруппа S/σ есть полугруппа типа $\left(\frac{Z_2^{(0)}}{O_3}\right)$.

Случай $\beta\delta\alpha\alpha$) рассмотрен.

$\beta\delta\alpha\beta$) Пусть D_x — сингулярная связка. Если D_x — правая связка, то из (8) выводим $b = xa = xyb = yb = a$, что противоречит допущению $a \neq b$. Так что D_x — обязательно левая связка. Тогда из равенств (10) вытекает

$$(yx)^0 = (yx)^0 y = y,\ (xy)^0 = (xy)^0 x = x,$$

поэтому согласно (9) имеем

$$a = ya = yb,\ b = xb = xa. \qquad (24)$$

Рассмотрим сначала случай, когда $ax \in D_a$. Ввиду того, что $ax\mathcal{D}a$ и $S = D_x \cup D_a \cup \{0\}$, существуют элементы t, $s \in D_x^{(1)}$ такие, что $a =$

$= taxs$. Отсюда, ввиду того, что D_x — левая связка и благодаря (24), имеем

$$a = ya = ytaxs = yax = ax = axy = ay,$$
$$b = xa = xax = bx = bxy = by.$$

Следовательно, $S = \langle a, x, y\rangle = \{a, y, x, b, 0\}$ и

$$a = a^2 = ab = ya = yb = ax = ay,$$
$$b = b^2 = ba = xb = xa = bx = by,$$
$$x = xy = x^2, \ y = y^2 = yx.$$

Мы приходим к тому, что S — полугруппа типа $\left(\frac{L_2^{(0)}}{O_2}\right)_1$.

Пусть теперь $ax \notin D_a$. Тогда $ax = 0$. Если $ay \in D_a$, то, как и выше, получим $ay = a = ax$, что приводит к противоречию. Так что $ay = 0$ и из (24) легко вывести равенства $bx = by = 0$. Следовательно, $S = \{x, y, a, b, 0\}$ и S есть полугруппа типа $\left(\frac{L_2^{(0)}}{O_2}\right)_2$.

Случай $\beta\delta\alpha$) рассмотрен.

$\beta\delta\beta$) Пусть $D_x = \{e, f, g, h\}$ — группоид Брандта B_2. Как и в случае $\beta\beta\beta$), приходим к равенствам (16). Положим, как и в случае $\beta\gamma\gamma$), $U = \langle D_x\rangle \setminus D_x$.

$\beta\delta\beta\alpha$) Предположим сначала, что

$$a\,\langle D_x\rangle = \{0\}. \tag{25}$$

Тогда $Ua = \{0\}$. Иначе, согласно (25), $a = vua$ для некоторого $u \in U$ и $v \in \langle D_x\rangle$. Но тогда, используя (16), имеем

$$a = vua = vuhb, \ b = ga = gvua.$$

Это приводит к тому, что собственная подполугруппа $I(x) = J(a) \cup U$ полугруппы S не является фильтрующейся и получаем противоречие.

Итак, $Ua = \{0\}$. Аналогично приходим к равенству $Ub = \{0\}$, если иметь в виду, что равенство $b\,\langle D_x\rangle = \{0\}$ легко выводится из (25) и (16). Теперь имеем равенства:

$$\begin{gathered} ea = efa = 0, \ ha = hea = 0, \\ fb = feb = 0, \ gb = gfa = 0. \end{gathered} \tag{26}$$

Множество $V = U \cup \{0\}$ есть идеал S, причем фактор-полугруппа S/V — не фильтрующаяся. Поэтому $V = \{0\}$ и, значит,

$$S = \langle x, y, a\rangle = \langle g, h, a\rangle = \{e, f, g, h, a, b, 0\}, \ \ a = fa = hb,$$
$$b = eb = ga, \ e^2 = e = gh, \ f = f^2 = gh, \ eg = g = gf, \ fh = h = he,$$

остальные произведения равны нулю. Значит, S есть полугруппа типа $\left(\frac{B_2}{O_2}\right)$.

$\beta\delta\beta\beta$) Теперь предположим, что для некоторого $u \in U$ $au \neq 0$. Тогда $au \in D_a$ и существуют $t, s \in \langle D_x\rangle^{(1)}$ такие, что

$$a = taus. \tag{27}$$

Используя (16), отсюда получаем $a = taus = tfaus$, поэтому для каждого $n \in N$ выполняется равенство

$$a = (tf)^0 a\,(us)^n.$$

Так как $(tf)^m = (tf)^0$ для некоторого $m \in N$, то
$$a = (tf)^0 a\,(us)^m = (tf)^0\,(tf)^0\,a\,(us)^m = (tf)^0 a.$$
Пусть $t \neq f$. Тогда $(tf)^0 \in U$ и согласно (16)
$$b = ga = g\,(tf)^0 a,\quad a = (tf)^0 a = (tf)^0 hb.$$
Отсюда ввиду $g\,(tf)^0$, $(tf)^0\,h \in U$ следует, что собственная подполугруппа $I\,(x)$ полугруппы S не является фильтрующейся в противоречие с минимальностью S. Следовательно, $t = f$ и из (27) выводим цепочку равенств:
$$a = taus = faus = aus = a\,(us)^2 = \ \ldots\ = a\,(us)^0,$$
$$b = ga = ga\,(us)^0 = b\,(us)^0. \tag{28}$$
Так как $u \in U$, $s \in \langle D_x\rangle^{(1)}$, то $(us)^0 \in U$. Далее, согласно лемме 1.4 все идемпотенты полугруппы U находятся в ее ядре (которое будем обозначать через K), являющемся или двухэлементной группой, или сингулярной связкой, так что $(us)^0 \in K$.

$\beta\delta\beta\beta\alpha$) Предположим, что $K \approx Z_2$. Тогда согласно доказательству леммы 1.5
$$K = \{g^0,\ gg^0\},\quad g^0 g = gg^0 = h^0 h = hh^0,\quad g^0 = h^0 = (us)^0.$$
Следовательно, используя (28), получаем
$$a = ag = ag^0 gg^0 g = ag^0 gg. \tag{29}$$
Если $ag^0 g \neq a$, то ввиду того, что $a \in \langle D_x\rangle$, отсюда вытекает, что собственная подполугруппа $I\,(x)$ полугруппы S не является фильтрующейся и приходим к противоречию. Таким образом, $ag^0 g = a$, а тогда из (28) и (29) выводим равенства:
$$ag = ag^0 g = a,\quad bg = bg^0 g = gag^0 g = gag = ga = b.$$
Аналогично, $ah = a$, $bh = b$. Так как $\langle D_x\rangle = \langle g,\ h\rangle$, отсюда получаем
$$a\,\langle D_x\rangle = \{a\},\quad b\,\langle D_x\rangle = \{b\}. \tag{30}$$

$\beta\delta\beta\beta\beta$) Теперь рассмотрим случай, когда K — сингулярная связка. Если K — левая связка, то для всякого $z \in \langle D_x\rangle$ имеем
$$a = a\,(us)^0 = a\,(us)^0 (us)^0 z = a\,(us)^0 z = az,$$
и, аналогично, $b = bz$, так что выполняются равенства (30). Если K — правая связка, то предположим сначала, что $az \neq a$ для некоторого $z \in \langle D_x\rangle$. Тогда $a\,(us)^0 z \neq a$ и можно предполагать, что $z \in U$. Из равенства $az\,(us)^0 = a\,(us)^0 = a$ следует, что $az \in D_a$ и соотношения $az = a \cdot z$, $a = (az)\,(us)^0$ приводят к тому, что $I(x)$ — собственная не фильтрующаяся подполугруппа полугруппы S в противоречие с минимальностью S.

Итак, все возможные случаи для K приводят к равенствам (30). Предположим, что $va \neq 0$ для некоторого $v \in U$. Тогда $va \in D_a$ и существуют w, $r \in \langle D_x\rangle^{(1)}$ такие, что $a = wvar$. Так как $wv \in U$, то приходим к разобранному выше случаю $t \neq f$, что приводит к противоречию. Значит, должно быть $Ua = \{0\}$, $Ub = \{0\}$. Отсюда, как и выше, следуют равенства (26). Отметим, что ввиду (30) $0 \notin \langle D_x\rangle$. Рассмотрим эквивалентность σ, все σ-классы которой, кроме, быть может, одного, совпадающего с U, одноэлементны. Из предыдущих рассмотрений ясно, что

$$S = \{a, b\} \cup \langle D_x \rangle \cup \{0\}$$

и что σ есть конгруэнция на S, причем ввиду соотношений (16) полугруппа S/σ не является фильтрующейся. Поэтому множество U состоит из одного элемента, скажем, c. Тогда $S = \{a, b, c, f, e, g, h, 0\}$ и из соотношений (13), (16), (26), (30) следуют равенства:

$$f = f^2 = hg, \ e = e^2 = gh, \ eg = g = gh,$$
$$h = he = fh, \ a = fa = hb = af = ae = ag = ah = ac,$$
$$b = eb = ga = bf = be = bg = bh = ba,$$
$$c = ef = fe = ge = fg = hf = eh = h^2 = g^2$$

и остальные произведения равны нулю. Так что S — это полугруппа типа $\left(\frac{B_2^{(0)}}{O_2}\right)$.

Случай $aU \cap D_a \neq \varnothing$ рассмотрен. Аналогично рассматривается случай $bU \cap D_a \neq \varnothing$.

$\beta\delta\beta\gamma$) *Теперь предположим, что*

$$aU = \{0\}, \ bU = \{0\}. \tag{31}$$

Отметим, что ввиду $a \langle D_x \rangle \neq \{0\}$ должно быть $aD_x \cap D_a \neq \varnothing$. Из соотношений (13) отсюда вытекает, что либо $ae \in D_a$, либо $af \in D_a$.

$\beta\delta\beta\gamma\alpha$) Предположим, что $ae \in D_a$. Тогда из равенств $ae = hbe = hbgh = agh$ следует, что $ag, bg, be \in D_a$. Если $ae = ag$, то приходим к противоречию с (31), так что $ae \neq ag$. Аналогично, $be \neq bg$. Если $ae = be$, то согласно (16) имеем

$$ae = hbe = hae, \ ae = be = g\,(ae),$$

поэтому

$$\langle D_x \rangle\, ae = \{ae\}, \ \langle D_x \rangle\, ag = \{ag\}$$

и мы приходим к случаю, двойственному к $\beta\delta\beta\beta$), если в качестве a взять ae, а в качестве b — элемент ag. Следовательно, $ae \neq ag$, $ae \neq be$. Из (31) следуют равенства

$$ea = efa = 0 = fb = ha = gb. \tag{32}$$

Из равенств (13) и (16) выводим

$$\begin{aligned} ae &= f\,(ae) = h\,(be) = (ag)\,h = h\,(bg)\,h,\\ be &= e\,(be) = g\,(ae) = (bg)\,h = g\,(ag)\,h,\\ ag &= f\,(ag) = h\,(bg) = (ae)\,g = h\,(be)\,g,\\ bg &= e\,(bg) = g\,(ag) = (bg)\,f = (be)\,g. \end{aligned} \tag{33}$$

Отметим еще, что $ae \neq bg$, иначе

$$bg = g\,(ae)\,g = gbg^2 \in gbU = \{0\}.$$

Следовательно, все четыре элемента ae, be, ag, bg попарно различны. Из равенств (31), (32), (33) вытекает, что множество $\langle D_x \rangle \cup \{ae, be, ag, bg\}$ есть подполугруппа в S, не являющаяся фильтрующейся, поэтому оно равно S. Далее, из сказанного выше следует, что множество $V = U \cup \{0\}$ есть идеал в S, причем фактор-полугруппа S/V не является фильтрующейся, поэтому $U = \{0\}$. Положив $a = ae$, $b = be$, $c = ag$, $d = bg$, имеем $S = \{e, f, g, h, a, b, c, d, 0\}$, где согласно (13), (16), (23), (32), (33) выполняются равенства

$$\begin{gathered} e = e^2 = gh,\ f = f^2 = hg,\ g = eg = gf, \\ h = fh = he,\ a = fa = hb = ch = ae, \\ b = be = eb = ga = dh,\ c = ag = fc = hd = cf, \\ d = ed = gc = df = bg, \end{gathered} \tag{34}$$

а остальные произведения равны нулю. Поэтому S есть полугруппа типа $\left(\frac{B_2}{O_4}\right)$. Случай $ae \in D_a$ рассмотрен.

βδβγβ) Пусть теперь $af \in D_a$. Тогда $ah \in D_a$. Этот случай рассматривается аналогично предыдущему. Здесь D_a состоит из элементов af, ah, bf, bh и $S = D_x \bigcup D_a \bigcup \{0\}$. Выполняются соотношения:

$$\begin{gathered} af = f\cdot af = (ah)\,g = h\,(bf) = (af)\,f, \\ dh = f\,(ah) = h\,(bh) = (ah)\,e = (af)\,h, \\ bf = e\,(bf) = g\,(af) = (bh)\,g = (bf)\,f, \\ bh = e\,(bh) = g\,(ah) = (bh)\,e = (bf)\,h. \end{gathered} \tag{35}$$

Если заменить ah на a, bh на b, af на c, bf на d, то из равенств (16), (35) получим равенства (34), при этом остальные произведения равны нулю, так что и в этом случае S — полугруппа типа $\left(\frac{B_2}{O_4}\right)$.

Все случаи рассмотрены. Теорема доказана.

Автор глубоко признателен Л. Н. Шеврину и С. И. Кацману за ценные советы и замечания в процессе работы над рукописью.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Аль-Халаф А.* Конечные парагональные группы. 1/Деп. в ВИНИТИ, 1988, № 8714-В88.
2. *Аль-Халаф А., Ширяев В. М.* Парагональные вполне простые полугруппы // III Всесоюзный симпозиум по теории полугрупп. Тез. сообщ. Свердловск: Урал. гос. ун-т, 1988. С. 3.
3. *Гретцер Г.* Общая теория решеток. М.: Мир, 1982.
4. *Клиффорд А., Престон Г.* Алгебраическая теория полугрупп. М.: Мир, 1972. Т. 1.
5. *Лаллеман Ж.* Полугруппы и комбинаторные приложения. М.: Мир, 1985.
6. *Ляпин Е. С.* Полугруппы. М.: Просвещение, 1960.
7. *Репницкий В. Б., Кацман С. И.* Коммутативные полугруппы, решетки подполугрупп которых удовлетворяют нетривиальному тождеству // Матем. сб. 1988. Т. 137(179). С. 462—481.
8. *Шеврин Л. Н.* Полугруппы с некоторыми типами структур подполугрупп // ДАН СССР. 1961. Т. 138, № 4. С. 796—798.
9. *Шеврин Л. Н.* Структурно-подполугрупповая характеристика коммутативных непериодических групп // Сиб. матем. журн. 1964. Т. 5, № 3. С. 671—678.
10. *Шеврин Л. Н., Суханов Е. В.* Структурные аспекты теории многообразий полугрупп // Изв. ВУЗов. Математика. 1989. № 6. С. 3—39.
11. *Ширяев В. М.* Фильтрующиеся полугруппы // Исследования алгебраических систем по свойствам их подсистем. Свердловск: Урал. гос. ун-т, 1985. С. 171—184.
12. *Ширяев В. М.* Полугруппы с полудистрибутивными решетками подполугрупп // ДАН БССР. 1985. Т. 29, № 4. С. 300—303.
13. *Ault J. E.* Extensions of one primitive inverse semigroup by another // Can. J. Math. 1972. V. 24, № 2. P. 270—278.
14. *Burris S. P., Sankappanavar H. P.* A course in universal algebra. New York — Berlin: Springer Verlag, 1981.
15. *Doyen J.* Equipotence et inicite de systemes generatoeurs minimaux dans certain monoides // Semigroup Forum. 1984. № 1—3. P. 341—346.
16. *Ego M.* Structure des demi-groupes dont le treillis des sous-demi-groupes est distributif // C. r. Acad. Sci. 1961. V. 252. A2490—2492.