

УДК 512.533.8-512.567.3

В. М. ШИРЯЕВ

ПОЛУГРУППЫ С ПОЛУДИСТРИБУТИВНЫМИ РЕШЕТКАМИ ПОДПОЛУГРУПП

(Представлено академиком АН БССР Д. А. Супруненко)

В данной работе исследуются свойства полугрупп с полудистрибутивными снизу (сверху) решетками подполугрупп. Решетка $(L, \wedge, \vee)$ называется $\wedge$ -полудистрибутивной (полудистрибутивной снизу) [2], если она удовлетворяет условию Йонссона $(SD_{\wedge})$ [1]:

$$a \wedge b = a \wedge c \Rightarrow a \wedge (b \vee c) = a \wedge b.$$

Двойственно определяются $\vee$ -полудистрибутивные (полудистрибутивные сверху) решетки. Условия $(SD_{\wedge})$ и $(SD_{\vee})$ являются естественными обобщениями условия дистрибутивности и привлекали внимание многих авторов. Полугруппы с дистрибутивными решетками подполугрупп были описаны Л. Н. Шевриным и М. Его в работах [7, 9, 12].

В данной работе дается близкое к этому описание полугрупп с $\wedge$ -полудистрибутивными решетками подполугрупп. Кроме того, показано, что класс всех полугрупп с $\vee$ -полудистрибутивными решетками подполугрупп значительно отличается от класса полугрупп с дистрибутивными решетками подполугрупп.

Используем обычную терминологию теории полугрупп [3, 15], теории групп [4] и теории решеток [1]. Ниже приводятся некоторые из обозначений и терминов, употребляющихся в работе.

$N = \{1, 2, 3, \dots\}$ — множество натуральных чисел. Если S — полугруппа, то $\text{Sub } S$ — ее решетка подполугрупп (включая и пустое подмножество); $\cap$ и $\vee$ — обозначения ее операций. Для $X \subset S$ через $\langle X \rangle$ обозначается подполугруппа, порожденная множеством X . Множество $X \subset S$ называется абсолютным базисом полугруппы S [5], если X — наименьшее (по включению) порождающее множество полугруппы S .

Определение 1. Полугруппу S называем фильтрующей (короче, FI -полугруппой), если каждая ее подполугруппа обладает абсолютным базисом.

Множество идемпотентов полугруппы S обозначаем через E_S . Для $e \in E_S$ через G_e обозначается наибольшая подгруппа полугруппы S , содержащая e , а через K_e — класс кручения идемпотента e , т. е. множество элементов из S , некоторая степень коих есть e . Через κ_S обозначается эквивалентность на периодической полугруппе S , соответствующая разбиению полугруппы S на классы кручения, т. е.

$$\kappa_S = \bigcup_{e \in E_S} K_e \times K_e.$$

Определение 2. Подполугруппу A полугруппы S называем G -подполугруппой, если вместе с каждым ее идемпотентом e она содержит подгруппу G_e полугруппы S .

Полугруппа S называется U -полугруппой, если теоретико-множественное объединение любых двух ее подполугрупп есть подполугруппа [15].

Определение 3. Периодическую полугруппу S называем UG -полугруппой, если теоретико-множественное объединение любых двух ее G -подполугрупп есть подполугруппа.

Определение 4. Подполугруппу A полугруппы S называем исключительной, если для некоторых $a, b, x, y \in S$ (может быть $x=y$) $A = \langle a, b, x, y \rangle$, $a \neq b$, $a \notin \langle x, y \rangle$, причем либо $ax=b$, либо $xa=b$ и либо $by=a$, либо $yb=a$.

2-Полусвязкой [10] называется полугруппа, порожденная двумя идемпотентами.

Определение 5. Пусть S — (нижняя) полурешетка и $B = \{b_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ — бесконечно возрастающая подцепь:

$$b_1 < b_2 < b_3 < \dots$$

Эту подцепь назовем специальной, если существует подполурешетка A полурешетки S такая, что $A \cap B = \emptyset$ и

$$\forall k \in \mathbb{N} \exists a \in A (a \cdot b_{k+1} = b_k).$$

Теорема 1. Для того чтобы решетка подполугрупп полугруппы S была $\wedge$ -полудистрибутивна, необходимо и достаточно, чтобы для S выполнялись следующие условия:

1) S — периодическая полугруппа, причем индекс каждого ее элемента не превосходит пяти;

2) E_S есть подполугруппа S и является ординальной суммой сингулярных связей [15];

3) эквивалентность κ_S есть конгруэнция;

4) для каждого $e \in E_S$ класс кручения K_e есть (идеальное) расширение локально циклической группы G_e при помощи нильпотентной класса не более пяти U -полугруппы;

5) S есть UG -полугруппа.

При доказательстве использовалась следующая

Теорема 2. Пусть S — группа. Решетка ее подгрупп $\wedge$ -полудистрибутивна тогда и только тогда, когда S — локально циклическая группа.

Замечание 1. Для случая, когда S — конечная группа, утверждение теоремы 2 было доказано М. Curzio [11]. Дистрибутивность $\vee$ -полудистрибутивной решеткой подгрупп группы доказал F. Napolitani [13]. Он же [14] исследовал некоторые структурные свойства конечных групп, связанные с условием $(SD_{\wedge})$.

Замечание 2. Из теоремы 1 видно, что класс всех полугрупп с $\wedge$ -полудистрибутивными решетками подполугрупп близок классу всех полугрупп с дистрибутивными решетками подполугрупп. Следующие примеры показывают, что эти классы не совпадают.

Пусть полугруппа S есть прямое произведение нетривиальной конечной циклической группы и двухэлементной сингулярной связки. Тогда решетка $\text{Sub } S$ $\wedge$ -полудистрибутивна, но не дистрибутивна. Таким же свойством обладает полугруппа, являющаяся полурешеткой двух нетривиальных конечных циклических групп, не являющаяся последовательно аннулирующей связкой этих групп.

Далее рассматриваем полугруппы с $\vee$ -полудистрибутивными решетками подполугрупп.

Теорема 3. Пусть S — полурешетка. Для того чтобы решетка $\text{Sub } S$ была $\vee$ -полудистрибутивна, необходимо и достаточно, чтобы S не содержала специальных подцепей.

Следствие 1. Полурешетка с условием максимальной имеет $\vee$ -полудистрибутивную решетку подполурешеток.

В дальнейшем рассматриваем свойства фильтрующихся полугрупп, образующих довольно обширный класс полугрупп, содержащийся в классе всех полугрупп, решетки подполугрупп которых $\vee$ -полудистрибутивны.

Предложение 1. Для того чтобы полугруппа S была фильтрующейся, необходимо и достаточно, чтобы порождающие множества любой ее подполугруппы составляли фильтр в булеане подмножеств этой подполугруппы.

Следствие 2. Решетка подполугрупп фильтрующейся полугруппы полудистрибутивна сверху.

Предложение 2. Всякая подгруппа фильтрующейся полугруппы имеет порядок не более двух.

Отсюда следует, что класс фильтрующихся полугрупп не совпадает с классом всех полугрупп с полудистрибутивными сверху решетками подполугрупп.

Предложение 3. Вполне простая полугруппа S является фильтрующейся тогда и только тогда, когда S есть либо сингулярная связка, либо группа порядка два. Вполне 0-простая полугруппа является фильтрующейся тогда и только тогда, когда либо она получается из вполне простой FI-полугруппы внешним присоединением нуля, либо есть пятиэлементная полугруппа Брандта B_2 .

Из теоремы 1.2 и леммы 1.1 работы [8] вытекает, что любая A_1 -полугруппа, т. е. полугруппа, обладающая возрастающим аннуляторным рядом, есть FI-полугруппа. Отсюда имеем

Предложение 4. Любая нильпотентная полугруппа есть FI-полугруппа.

Из результатов работ [5, 6] легко следует

Предложение 5. Любая свободная, а также свободная коммутативная полугруппа есть FI-полугруппа.

Отсюда следует, что класс FI-полугрупп не замкнут относительно взятия гомоморфных образов. Однако для некоторых типов конгруэнций свойство фильтруемости сохраняется при соответствующих гомоморфизмах.

Лемма 1. Пусть S есть FI-полугруппа и I — ее идеал. Тогда фактор-полугруппа Риса S/I есть FI-полугруппа.

Теорема 4. Пусть S — конечная полугруппа. Для того чтобы S была фильтрующейся, необходимо и достаточно, чтобы она не имела исключительных подполугрупп и каждый ее регулярный D -класс (как множество с индуцированной частичной операцией умножения) был или четырехэлементным группоидом Брандта, или сингулярной связкой, или двухэлементной группой.

Следствие 3. Для того чтобы конечная инверсная комбинаторная (т. е. без нетривиальных подгрупп) полугруппа S была FI-полугруппой, необходимо и достаточно, чтобы каждый ее D -класс имел не более двух идемпотентов и множество $S \setminus E_S$ либо пусто, либо является антицепью относительно естественного порядка на инверсной полугруппе S .

Следствие 4. Конечная связка S есть FI-полугруппа тогда и только тогда, когда S есть полурешетка сингулярных связок, не содержащая четырехэлементной подсвязки вида $\{x, y, a, b\}$, где $x = x^2 = yx$, $y = y^2 = xy$, $a = a^2 = ay = by = ba = ya = xa$, $b = b^2 = ax = bx = ab = yb = xb$, и ей двойственной.

Следствие 5. Конечная полурешетка есть FI-полугруппа.

Следствие 6. Конечная полугруппа, каждый D -класс которой тривиален, есть FI-полугруппа.

Следствие 7. 2-Полусвязка является FI-полугруппой тогда и только тогда, когда она комбинаторна и всякая ее прямоугольная подсвязка сингулярна.

Список всех фильтрующихся 2-полусвязок можно составить, используя классификацию 2-полусвязок, данную в [10].

Пусть S — конечная полугруппа, а ε_S — эквивалентность на S , такая, что все максимальные подгруппы S являются ε_S -классами, а остальные ε_S -классы (если они есть) одноэлементны.

Следствие 8. Пусть S — конечная FI-полугруппа. Тогда ε_S есть конгруэнция, а фактор-полугруппа S/ε_S есть комбинаторная FI-полугруппа и является наибольшим комбинаторным гомоморфным образом полугруппы S .

Задача восстановления некомбинаторной FI-полугруппы S по данному ее наибольшему комбинаторному гомоморфному образу $T = S/\varepsilon_S$ решается посредством конструкции (которая здесь не приводится ввиду недостатка места), в основе которой лежит операция идеального расширения двухэлементной группы с помощью идеализатора соответствующего идемпотента в T .

Теорема 5. Конечнопорожденная коммутативная архимедова полугруппа без идемпотентов есть FI-полугруппа. Конечная коммутативная архимедова полугруппа является фильтрующейся тогда и только тогда, когда ее ядро имеет не более двух элементов.

Следствие 9. Конечная циклическая полугруппа есть FI-полугруппа тогда и только тогда, когда период ее образующего не превосходит двух.

Summary

A description of semigroups with $\wedge$ -semidistributive semigroup lattices similar to the well-known description of semigroups with distributive semigroup lattices is obtained. Semigroups of some classes, in particular, those of finite semilattices, free (commutative) semigroups, commutative finitely generated Archimedean semigroups, nilpotent semigroups are shown to have $\vee$ -semidistributive semigroup lattices.

Литература

1. Гретцер Г. Общая теория решеток. — М.: Наука, 1982. — 452 с.
2. Игошин В. И. — Упорядоченные множества и решетки, 1978, вып. 5, с. 44—55.
3. Клиффорд А., Престон Г. Алгебраическая теория полугрупп. — М.: Мир, 1972. — 285 с.
4. Курош А. Г. Теория групп. — М.: Наука, 1967. — 648 с.
5. Рыбаков Л. М. — Мат. сб., 1939, т. 5 (47), № 3, с. 521—536.
6. Шеврин Л. Н. — ДАН СССР, 1960, т. 133, № 3, с. 537—539.
7. Шеврин Л. Н. — ДАН СССР, 1961, т. 138, № 4, с. 796—798.
8. Шеврин Л. Н. — Мат. сб., 1961, т. 55 (97), № 4, с. 471—480.
9. Шеврин Л. Н. — Сиб. мат. ж., 1962, т. 3, № 3, с. 446—470.
10. Benzaken C., Mayr H. C. — Semigroup Forum, 1975, vol. 10, p. 115—128.
11. Curzio M. — Ricerche mat., 1957, vol. 6, N 1, p. 96—110.
12. Ego M. — C. r. Acad. Sci., 1961, vol. 252, N 17, p. 2490—2492.
13. Napolitani F. — Ricerche mat., 1965, vol. 14, N 2, p. 93—101.
14. Napolitani F. — Ricerche mat., 1968, vol. 17, N 1, p. 95—108.
15. Petrich M. Lectures in Semigroups. — Berlin: Akademie-Verlag, 1977. — 168 p.