

УДК 535.36

**А. Б. Гаврилович<sup>1)</sup>, Н. Я. Радыно<sup>2)</sup>****РЕШЕНИЕ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ПЕРЕНОСА ИЗЛУЧЕНИЯ  
В ОГРАНИЧЕННОМ ОБЪЕМЕ ДИСПЕРСНОЙ СРЕДЫ С ЛИНЕЙНОЙ  
ИНДИКАТРИСОЙ РАССЕЯНИЯ**

*Предлагается метод решения краевой задачи для уравнения переноса излучения с линейной индикатрисой, причем граничные условия являются точными в формулировке данной задачи. Приводятся результаты численных экспериментов, в основе которых лежит решение уравнения переноса излучения.*

**Введение.** Многие задачи теории переноса излучения в дисперсных средах решаются в предположении, что среда имеет бесконечную протяженность или занимает бесконечное полупространство [1, 2]. Однако реальные природные объекты и технические дисперсные среды, как правило, имеют ограниченную протяженность. Тем не менее закономерности переноса излучения в средах ограниченных размеров изучены еще недостаточно, поэтому исследования для трехмерных объемов представляют собой актуальную задачу оптики дисперсных сред, физики защиты реакторов, астрофизики, атмосферной оптики и т. п. [3–5]. В данной работе решим краевую задачу для уравнения переноса излучения (УПИ) с линейной индикатрисой рассеяния. Решение УПИ найдем в виде

$$I(x, y, z, \Omega_1, \Omega_2, \Omega_3) = J_0(x, y, z) + J_1(x, y, z) \Omega_1 + J_2(x, y, z) \Omega_2 + J_3(x, y, z) \Omega_3, \quad (1)$$

где  $\Omega = (\Omega_1(\vartheta, \varphi), \Omega_2(\vartheta, \varphi), \Omega_3(\vartheta, \varphi))$  – единичный вектор направления. Функции  $J_0(\mathbf{r}), J_1(\mathbf{r}), J_2(\mathbf{r}), J_3(\mathbf{r})$  зависят только от пространственных переменных  $\mathbf{r} = (x, y, z)$  и находятся при решении вспомогательной краевой задачи для модифицированного уравнения Гельмгольца. Решив краевую задачу для УПИ, когда объем среды выбирается в форме параллелепипеда, получим результаты численных экспериментов.

**Формулировка краевой задачи для уравнения переноса излучения.** Пусть монохроматический мононаправленный пучок света нормально падает на трехмерный по пространству объем дисперсной среды с линейной индикатрисой рассеяния. Выберем объем среды в форме прямоугольного параллелепипеда, ориентированного по осям декартовой системы координат  $x, y, z$ . Поверхность  $\Gamma$  среды определяется шестью гранями, задаваемыми уравнениями:  $x = 0, x = a, y = 0, y = b, z = 0, z = c$ ; каждой грани соответствуют шесть внутренних нормалей, имеющих координаты:  $n_1 = 1, n_2 = 0, n_3 = 0; n_1 = -1, n_2 = 0, n_3 = 0; n_1 = 0, n_2 = 1, n_3 = 0; n_1 = 0, n_2 = -1, n_3 = 0; n_1 = 0, n_2 = 0, n_3 = 1; n_1 = 0, n_2 = 0, n_3 = -1$ . Объем среды  $V = abc$ .

Интегродифференциальное уравнение переноса [1]

$$(\Omega, \nabla) I(\mathbf{r}, \Omega) + \varepsilon I(\mathbf{r}, \Omega) = \frac{\varepsilon \Lambda}{4\pi} \int_{\Omega'} \kappa(\Omega, \Omega') I(\mathbf{r}, \Omega') d\Omega' + B_1(\mathbf{r}, \Omega), \quad (2)$$

дополненное граничным условием

$$I(\mathbf{r}_\Gamma, \Omega) = 0 \quad \text{при} \quad (\mathbf{n}_\Gamma, \Omega) > 0, \quad (3)$$

определяет краевую задачу теории переноса излучения в дисперсной среде в условиях многократного рассеяния. В уравнении (2)  $I(\mathbf{r}, \Omega)$  – интенсивность диффузного излучения как функция пространственных координат  $\mathbf{r} = (x, y, z)$  и направления  $\Omega = (\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3)$  ( $\Omega_1(\vartheta, \varphi) = \sin \vartheta \cos \varphi, \Omega_2(\vartheta, \varphi) = \sin \vartheta \sin \varphi, \Omega_3(\vartheta, \varphi) = \cos \vartheta$ ,  $\vartheta$  и  $\varphi$  – полярный и азимутальный углы сферической координатной системы). Скалярное произведение записывается как

$$(\Omega, \Omega') = \Omega_1 \Omega_1' + \Omega_2 \Omega_2' + \Omega_3 \Omega_3' = \cos \vartheta \cos \vartheta' + \sin \vartheta \sin \vartheta' \cos(\varphi - \varphi') = \cos \theta, \quad (4)$$

<sup>1)</sup>Институт физики НАН Беларуси. 220072, г. Минск, просп. Ф. Скорины, 68; э-почта: gavril@dragon.bas-net.by;  
<sup>2)</sup>Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники. 220013, г. Минск, ул. П. Бровки, 6; э-почта: kolya@im.bas-net.by. Поступила 20.09.2004.

где  $\theta$  — угол рассеяния, т. е. угол между векторами  $\Omega$  и  $\Omega'$ . Обозначим индикатрису рассеяния через  $\kappa(\mu)$  ( $-1 \leq \mu \leq 1$ ), при этом

$$\int_{-1}^1 \kappa(\mu) d\mu = 2. \quad (5)$$

В нашем случае  $\kappa(\mu) = 1 + g\mu$  ( $g$  — заданный коэффициент) [2];

$$B_1(r, \Omega) = \frac{\varepsilon\Lambda}{4\pi} F\pi \exp(-\varepsilon z) x(\cos \vartheta) = \frac{\varepsilon\Lambda F}{4} \exp(-\varepsilon z) (1 + g \cos \vartheta) \quad (6)$$

— функция источников однократного рассеяния.

**Вид решения УПИ для линейной индикатрисы рассеяния.** Найдем решение уравнения переноса излучения в виде

$$I = J_0 + J_1\Omega_1 + J_2\Omega_2 + J_3\Omega_3. \quad (7)$$

Исходя из симметрии задачи (на параллелепипед падает постоянный поток излучения), предполагаем, что  $\frac{\partial I}{\partial x} \approx 0$  и  $\frac{\partial I}{\partial y} \approx 0$ . Выбирая вектор направления  $\Omega_1 = p$ ,  $\Omega_2 = q$ ,  $\Omega_3 = 0$ ,  $p^2 + q^2 = 1$ , уравнение переноса излучения перепишем как

$$I(\mathbf{r}, \Omega) = \frac{\Lambda}{4\pi} \int_{\Omega'} \kappa(\Omega, \Omega') I(\mathbf{r}, \Omega') d\Omega' + \frac{\Lambda F}{4} \exp(-\varepsilon z) (1 + g\Omega_3). \quad (8)$$

Отсюда, подставляя в интеграл функцию  $\kappa(\mu) = 1 + g\mu$ , получаем соотношение (7). Искать решение УПИ будем в виде (7), а для того, чтобы определить функции  $J_0, J_1, J_2, J_3$ , выведем уравнение в частных производных для  $J_0$ .

**Метод решения краевой задачи для УПИ с линейной индикатрисой рассеяния.** Вычислим интеграл

$$\frac{1}{4\pi} \int_{\Omega'} (1 + g(\Omega_1\Omega_1' + \Omega_2\Omega_2' + \Omega_3\Omega_3')) (J_0 + J_1\Omega_1' + J_2\Omega_2' + J_3\Omega_3') d\Omega' = J_0 + \frac{g}{3} (J_1\Omega_1 + J_2\Omega_2 + J_3\Omega_3). \quad (9)$$

Интегрирование по телесному углу дает в случае УПИ соотношение

$$\frac{4\pi}{3} \left\{ \frac{\partial J_1}{\partial x} + \frac{\partial J_2}{\partial y} + \frac{\partial J_3}{\partial z} \right\} + 4\pi\varepsilon J_0 = \varepsilon\Lambda J_0 + \varepsilon\Lambda\pi F \exp(-\varepsilon z), \quad (10)$$

а для выражения (2), умноженного на  $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$  — уравнение

$$\frac{4\pi}{3} \frac{\partial J_0}{\partial x} + \frac{4\pi}{3} \varepsilon J_1 = \frac{g}{3} J_1 \frac{4\pi}{3} \varepsilon\Lambda, \quad (11)$$

$$\frac{4\pi}{3} \frac{\partial J_0}{\partial y} + \frac{4\pi}{3} \varepsilon J_2 = \frac{g}{3} J_2 \frac{4\pi}{3} \varepsilon\Lambda, \quad (12)$$

$$\frac{4\pi}{3} \frac{\partial J_0}{\partial z} + \frac{4\pi}{3} \varepsilon J_3 = \frac{g}{3} J_3 \frac{4\pi}{3} \varepsilon\Lambda + \frac{\varepsilon\Lambda F}{4} g \frac{4\pi}{3} \exp(-\varepsilon z). \quad (13)$$

Из системы уравнений (10)–(13) следует, что

$$J_1 = \frac{1}{\varepsilon \left( \Lambda \frac{g}{3} - 1 \right)} \frac{\partial J_0}{\partial x}, \quad (14)$$

$$J_2 = \frac{1}{\varepsilon \left( \Lambda \frac{g}{3} - 1 \right)} \frac{\partial J_0}{\partial y}, \quad (15)$$

$$J_3 = \frac{1}{\varepsilon \left( \Lambda \frac{g}{3} - 1 \right)} \frac{\partial J_0}{\partial z} - \frac{1}{\varepsilon \left( \Lambda \frac{g}{3} - 1 \right)} \frac{\varepsilon \Lambda F}{4} g \exp(-\varepsilon z). \quad (16)$$

Подставляя выражения (14)–(16) в уравнение (10), получаем

$$\Delta J_0 - 3\varepsilon^2 (\Lambda - 1) \left( \Lambda \frac{g}{3} - 1 \right) J_0 = \frac{\varepsilon^2 \Lambda F}{4} \exp(-\varepsilon z) \left( 3 \left( \Lambda \frac{g}{3} - 1 \right) - g \right). \quad (17)$$

Таким образом, для нахождения  $J_0$  необходимо решить модифицированное уравнение Гельмгольца (17) с краевыми условиями на параллелепипеде.

Исходным для вывода краевых (или граничных) условий является соотношение

$$I(\mathbf{r}_\Gamma, \mathbf{\Omega}) = 0 \quad \text{для} \quad (\mathbf{n}_\Gamma, \mathbf{\Omega}) > 0, \quad (18)$$

где  $I(\mathbf{r}_\Gamma, \mathbf{\Omega})$  — интенсивность диффузного излучения на границе параллелепипеда. Из (18) следует граничное условие в форме интеграла для освещенности  $E(\mathbf{r}_\Gamma, \mathbf{n}_\Gamma)$  границы  $\Gamma$  параллелепипеда:

$$E(\mathbf{r}_\Gamma, \mathbf{n}_\Gamma) = \iint_{(\mathbf{n}_\Gamma, \mathbf{\Omega}) > 0} I(\mathbf{r}_\Gamma, \mathbf{\Omega}) \cdot (\mathbf{n}_\Gamma, \mathbf{\Omega}) d\Omega = 0. \quad (19)$$

из которого следует, что освещенность границы  $\Gamma$  рассеянным извне излучением отсутствует.

Далее подставляем в интеграл (19) интенсивность  $I(\mathbf{r}, \mathbf{\Omega})$  в виде суммы (7) и получаем

$$\begin{aligned} E(\mathbf{r}_\Gamma, \mathbf{n}_\Gamma) &= J_0(\mathbf{r}_\Gamma) \iint_{(\mathbf{n}_\Gamma, \mathbf{\Omega}) > 0} (\mathbf{n}_\Gamma, \mathbf{\Omega}) d\Omega + J_1(\mathbf{r}_\Gamma) \iint_{(\mathbf{n}_\Gamma, \mathbf{\Omega}) > 0} \Omega_1(\mathbf{n}_\Gamma, \mathbf{\Omega}) d\Omega + \\ &+ J_2(\mathbf{r}_\Gamma) \iint_{(\mathbf{n}_\Gamma, \mathbf{\Omega}) > 0} \Omega_2(\mathbf{n}_\Gamma, \mathbf{\Omega}) d\Omega + J_3(\mathbf{r}_\Gamma) \iint_{(\mathbf{n}_\Gamma, \mathbf{\Omega}) > 0} \Omega_3(\mathbf{n}_\Gamma, \mathbf{\Omega}) d\Omega = \\ &= J_0(\mathbf{r}_\Gamma) \pi + J_1(\mathbf{r}_\Gamma) \frac{2\pi}{3} n_1 + J_2(\mathbf{r}_\Gamma) \frac{2\pi}{3} n_2 + J_3(\mathbf{r}_\Gamma) \frac{2\pi}{3} n_3. \end{aligned} \quad (20)$$

Другим уравнением системы, как и ранее, является соотношение

$$\mathbf{J}(\mathbf{r}) = \frac{1}{\varepsilon \left( \Lambda \frac{g}{3} - 1 \right)} \nabla J_0(\mathbf{r}). \quad (21)$$

Подставив (21) в (20), получим

$$E(\mathbf{r}_\Gamma, \mathbf{n}_\Gamma) = \pi J_0(\mathbf{r}_\Gamma) - \frac{2\pi}{3} \frac{1}{\varepsilon \left( 1 - \Lambda \frac{g}{3} \right)} (\nabla J_0(\mathbf{r}_\Gamma), \mathbf{n}_\Gamma(\mathbf{r}_\Gamma)) = 0 \quad (22)$$

или

$$(\mathbf{n}_\Gamma, \nabla) J_0(\mathbf{r}_\Gamma) - \frac{3}{2} \varepsilon \left( 1 - \Lambda \frac{g}{3} \right) J_0(\mathbf{r}_\Gamma) = 0 \quad (23)$$

— искомое граничное условие. Таким образом, решение уравнения переноса излучения свелось к решению граничной задачи для модифицированного уравнения Гельмгольца:

$$\begin{aligned} \Delta J_0 - k^2 J_0 &= -K \exp(-\varepsilon z), \\ (\mathbf{n}_\Gamma, \nabla) J_0(\mathbf{r}_\Gamma) - \eta J_0(\mathbf{r}_\Gamma) &= 0. \end{aligned} \quad (24)$$

Здесь  $k^2 = 3\varepsilon^2(\Lambda - 1) \left( \Lambda \frac{g}{3} - 1 \right)$ ,  $K = \frac{\varepsilon^2 \Lambda F}{4} \left( 3 \left( \Lambda \frac{g}{3} - 1 \right) - g \right)$ ,  $\eta = \frac{3}{2} \varepsilon \left( 1 - \Lambda \frac{g}{3} \right)$  — положительные постоянные.

Решим задачу (24) методом Фурье, а именно: функцию  $J_0(x, y, z)$  будем искать в виде

$$J_0(x, y, z) = \sum_{i,j=1} Z_{ij}(z) \bar{X}_i(x) \bar{Y}_j(y), \quad (25)$$

где функции  $\bar{X}_i(x)\bar{Y}_j(y)$  образуют полную ортонормированную систему. Так,  $X_i(x)$  являются решениями следующей задачи Штурма—Лиувилля [6]:

$$\begin{aligned} X'' + \lambda_x^2 X &= 0; \\ X'(x) - \eta X(x) &= 0, \quad x = 0; \\ X'(x) + \eta X(x) &= 0, \quad x = a. \end{aligned} \quad (26)$$

Таким образом:

$$X_i(x) = \sin\left(\frac{\mu_i}{a}x + \theta_i\right), \quad \theta_i = \arctg \frac{\mu_i}{\eta a}, \quad \lambda_{xi} = \frac{\mu_i}{a}, \quad (27)$$

здесь  $\mu_i$  — решения трансцендентного уравнения

$$\operatorname{ctg} \mu = \frac{1}{2} \left( \frac{\mu}{\eta a} - \frac{\eta a}{\mu} \right); \quad (28)$$

$$\|X_i\|^2 = \frac{a}{2} + \frac{\eta}{\lambda_{xi}^2 + \eta^2}, \quad \bar{X}_i(x) = \frac{X_i(x)}{\|X_i\|}.$$

Аналогично для функции  $Y_j(y)$  запишем систему

$$\begin{aligned} Y'' + \lambda_y^2 Y &= 0; \\ Y'(y) - \eta Y(y) &= 0, \quad y = 0; \\ Y'(y) + \eta Y(y) &= 0, \quad y = b. \end{aligned} \quad (29)$$

Решениями (29) будут функции

$$Y_j(y) = \sin\left(\frac{\mu_j}{b}y + \theta_j\right), \quad \theta_j = \arctg \frac{\mu_j}{\eta b}, \quad \lambda_{yj} = \frac{\mu_j}{b}; \quad (30)$$

$\mu_j$  — решения трансцендентного уравнения

$$\operatorname{ctg} \mu = \frac{1}{2} \left( \frac{\mu}{\eta b} - \frac{\eta b}{\mu} \right); \quad (31)$$

$$\|Y_j\|^2 = \frac{b}{2} + \frac{\eta}{\lambda_{yj}^2 + \eta^2}, \quad \bar{Y}_j(y) = \frac{Y_j(y)}{\|Y_j\|}.$$

Найдем функции  $Z_{ij}(z)$ . Для этого, согласно методу Фурье разделения переменных, необходимо решить следующую задачу:

$$\begin{aligned} Z_{ij}''(z) + \lambda_{ij}^2 Z_{ij}(z) &= a_{ij}(z); \\ \lambda_{ij}^2 &= \lambda_{xi}^2 + \lambda_{yj}^2 + k^2, \quad k^2 = 3\varepsilon^2 (\Lambda - 1) \left( \Lambda \frac{g}{3} - 1 \right); \\ Z_{ij}'(z) - \eta Z_{ij}(z) &= 0, \quad z = 0; \\ Z_{ij}'(z) + \eta Z_{ij}(z) &= 0, \quad z = c. \end{aligned} \quad (32)$$

Здесь  $a_{ij}(z)$  — коэффициент Фурье функции  $-K \exp(-\varepsilon z)$ , разложенной по ортонормированной системе  $\{\bar{X}_i(x)\bar{Y}_j(y)\}_{i,j=1}^\infty$ :

$$a_{ij}(z) = -K \exp(-\varepsilon z) \int_0^a \int_0^b \bar{X}_i(x) \bar{Y}_j(y) dx dy = -K \exp(-\varepsilon z) \alpha_{ij},$$

$$\alpha_{ij} = \frac{1}{\|X_i\|} \int_0^a X_i(x) dx \frac{1}{\|Y_j\|} \int_0^b Y_j(y) dy .$$

Обозначим

$$n_{X_i} = \frac{1}{\|X_i\|} \int_0^a X_i(x) dx = \frac{2}{\lambda_{xi}} \sin \frac{a\lambda_{xi}}{2} \sin \left( \frac{a\lambda_{xi}}{2} + \operatorname{arctg} \left( \frac{\lambda_{xi}}{\eta} \right) \right) .$$

$$n_{Y_j} = \frac{1}{\|Y_j\|} \int_0^b Y_j(y) dy = \frac{2}{\lambda_{yj}} \sin \frac{b\lambda_{yj}}{2} \sin \left( \frac{b\lambda_{yj}}{2} + \operatorname{arctg} \left( \frac{\lambda_{yj}}{\eta} \right) \right) .$$

Тогда правая часть уравнения (32) будет иметь вид

$$a_{ij}(z) = -K \exp(-\varepsilon z) \frac{n_{X_i} n_{Y_j}}{\sqrt{\left( \frac{a}{2} + \frac{\eta}{\lambda_{xi}^2 + \eta^2} \right) \left( \frac{b}{2} + \frac{\eta}{\lambda_{yj}^2 + \eta^2} \right)}} . \quad (33)$$

Если  $\lambda_{ij} \neq \varepsilon$ , то решение (32) найдем как

$$Z_{ij}(z) = C_1 \exp(-\lambda_{ij}z) + C_2 \exp(\lambda_{ij}z) + \beta \exp(-\lambda_{ij}z) , \quad \beta = \frac{K\alpha_{ij}}{\lambda_{ij}^2 - \varepsilon^2} , \quad (34)$$

где

$$C_1 = \frac{\beta \left( \varepsilon + \eta - \frac{(\lambda_{ij} - \eta)(\varepsilon - \eta)}{(\lambda_{ij} + \eta)} \exp(-c(\lambda_{ij} + \varepsilon)) \right)}{(\lambda_{ij} + \eta) \left[ -1 + \frac{(\lambda_{ij} - \eta)^2}{(\lambda_{ij} + \eta)^2} \exp(-2\lambda_{ij}c) \right]} ; \quad (35)$$

$$C_2 = \frac{\beta \exp(-\lambda_{ij}c) ((\exp(-\lambda_{ij}c) - \exp(-\varepsilon c)) (\lambda_{ij}\varepsilon - \eta^2) + (\exp(-\lambda_{ij}c) + \exp(-\varepsilon c)) (\lambda_{ij}\eta - \eta\varepsilon))}{(\lambda_{ij} + \eta)^2 \left[ -1 + \frac{(\lambda_{ij} - \eta)^2}{(\lambda_{ij} + \eta)^2} \exp(-2\lambda_{ij}c) \right]} . \quad (36)$$

При этом решение краевой задачи (24) для модифицированного уравнения Гельмгольца будет следующим:

$$J_0(x, y, z) = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} Z_{ij}(z) \frac{X_i(x) Y_j(y)}{\sqrt{\left( \frac{a}{2} + \frac{\eta}{\lambda_{xi}^2 + \eta^2} \right) \left( \frac{b}{2} + \frac{\eta}{\lambda_{yj}^2 + \eta^2} \right)}} . \quad (37)$$

Функции  $J_1(\mathbf{r})$ ,  $J_2(\mathbf{r})$ ,  $J_3(\mathbf{r})$  определяются по формулам (14), (15), (16) при подстановке (37) для  $J_0(\mathbf{r})$ . Таким образом, решение уравнения переноса излучения будет иметь вид

$$I(x, y, z, \Omega_1, \Omega_2, \Omega_3) = J_0(x, y, z) + J_1(x, y, z) \Omega_1 + J_2(x, y, z) \Omega_2 + J_3(x, y, z) \Omega_3 . \quad (38)$$

Для иллюстрации приведем примеры применения полученного решения (38) для вычисления световых потоков, сформированных в ограниченном объеме дисперсной среды.

*Пример 1.* Рассмотрим случай, когда дисперсная среда имеет форму прямоугольного параллелепипеда с размерами  $a \times b \times c$ . Выберем следующие параметры задачи:  $g = 0.99$ , объемный показатель ослабления  $\varepsilon = 25$ , альbedo однократного рассеяния  $\Lambda = 0.95$ ,  $F = 1$  (световой поток, падающий на объем дисперсной

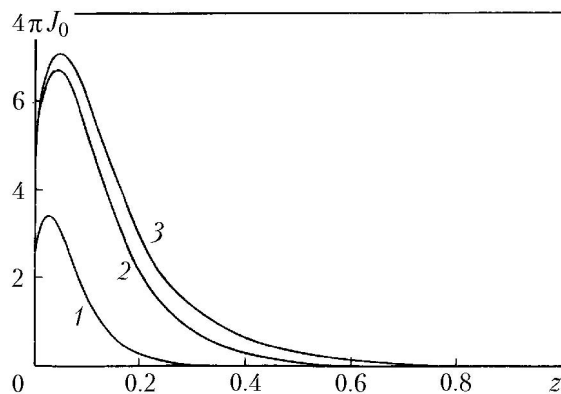


Рис. 1. Зависимость функции  $4\pi J_0(a/2, b/2, z)$  от  $z$ : 1 —  $a = 0.125$ ; 2 — 0.5; 3 — 4.0

среды, будет равен  $\pi$ .) Высоту параллелепипеда положим равной  $c = 1$ , а его длину и ширину параллелепипеда будем варьировать. Размерность  $a, b, c$  определяется соображениями удобства так, чтобы произведения  $\epsilon a, \epsilon b, \epsilon c$  были безразмерными величинами.

Интегрируя решение УПИ (38) по телесному углу, получаем величину скалярного потока  $4\pi J_0(x, y, z)$  внутри дисперсной среды. Зависимость скалярного потока от переменной  $z$  при фиксированных значениях  $x = a/2$  и  $y = b/2$  для  $a = b$  показана на рис. 1.

При вычислении значения функции  $J_0(x, y, z)$  использовали 400 слагаемых в сумме (37). Зависимость имеет характерный вид с максимумом, величина которого растет до некоторого фиксированного значения при увеличении поперечных размеров среды.

*Пример 2.* Зависимость  $4\pi J_0(x, y, z)$  от переменной  $z$  при фиксированных значениях  $x = a/2$  и  $y = b/2$  для прямоугольного параллелепипеда  $2 \times 2 \times 1$  при различных значениях показателя ослабления  $\epsilon$  представлена на рис. 2. Видно, что с ростом показателя ослабления световое излучение локализуется ближе к нижней границе среды  $z = 0$ .

*Пример 3.* Зависимость скалярного потока  $4\pi J_0(x, y, z)$  от координаты  $x$  при фиксированных значениях  $z = c/2$  и  $y = b/2$  для прямоугольного параллелепипеда  $2 \times 2 \times 1$  при различных значениях показателя ослабления  $\epsilon$  приведена на рис. 3. Здесь отмечается рост градиентов светового потока у боковых границ среды при переходе от высоких к низким значениям показателя ослабления.

*Пример 4.* На рис. 4 дана зависимость светового потока  $F_{z=c}$ , вышедшего из грани  $z = c$ , от геометрических размеров среды, полагая  $a = b$  при различных значениях  $c$ . Важно отметить, что выходящий из верхней грани  $z = c$  световой поток определяется не только величиной  $\epsilon$  и  $c$ , но существенно зависит также и от поперечных размеров среды.

Используя решение (38) краевой задачи для УПИ, легко вычислить направленные световые потоки излучения, выходящие из каждой грани параллелепипеда:

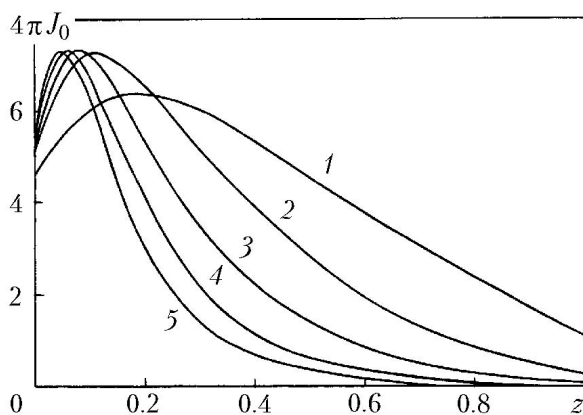


Рис. 2. Зависимость функции  $4\pi J_0(a/2, b/2, z)$  от  $z$ : 1 —  $\epsilon = 5$ ; 2 — 10; 3 — 15; 4 — 20; 5 — 25

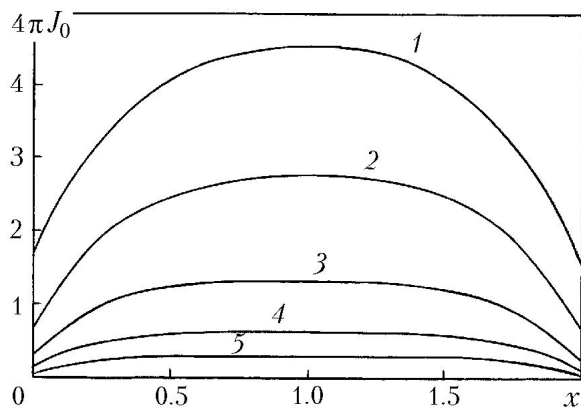


Рис. 3. Зависимость функции  $4\pi J_0(x, b/2, c/2)$  от  $x$ : 1 —  $\epsilon = 5$ ; 2 — 10; 3 — 15; 4 — 20; 5 — 25

из правой боковой грани ( $x = a$ ):

$$F_{x=a} = \int_0^c \int_0^b \left\{ \pi J_0(a, y, z) + \frac{2}{3} \pi J_1(a, y, z) \right\} dy dz ;$$

из левой грани ( $x = 0$ )  $F_{x=0} = F_{x=a}$ ;

из боковой грани ( $y = a$ ):

$$F_{y=b} = \int_0^c \int_0^a \left\{ \pi J_0(x, b, z) + \frac{2}{3} \pi J_2(x, b, z) \right\} dx dz ;$$

из грани  $y = 0$   $F_{y=0} = F_{y=b}$ ;

из верхней грани ( $z = c$ ):

$$F_{z=c} = \int_0^a \int_0^b \left\{ \pi J_0(x, y, c) + \frac{2}{3} \pi J_3(x, y, c) \right\} dx dy + \pi Fab \exp(-\epsilon c) ;$$

из нижней грани ( $z = 0$ ):

$$F_{z=0} = \int_0^a \int_0^b \left\{ \pi J_0(x, y, 0) - \frac{2}{3} \pi J_3(x, y, 0) \right\} dx dy$$

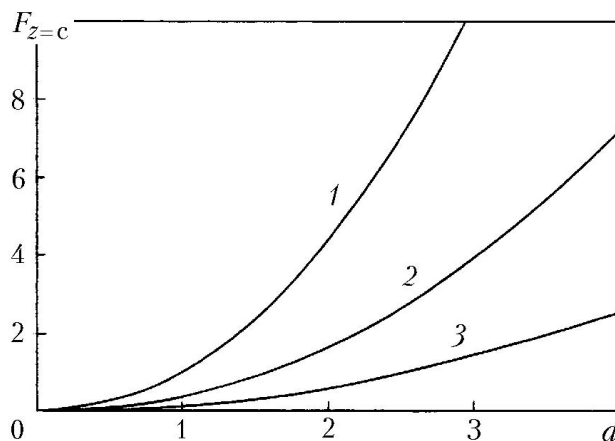


Рис. 4. Зависимость выходящего из грани  $z = c$  светового потока  $F_{z=c}$  от длины параллелепипеда: 1 —  $c = 0.125$ ; 2 — 0.25; 3 — 0.375

**Потоки (%), выходящие из каждой грани параллелепипеда**

Световой поток	Геометрические размеры дисперсной среды		
	1×1×3	3×1×1	1×1×1
$F_{x=0}$	6.25	1.81	6.25
$F_{x=a}$	6.25	1.81	6.25
$F_{y=0}$	6.25	6.68	6.25
$F_{y=b}$	6.25	6.68	6.25
$F_{z=0}$	48.19	51.16	48.19
$F_{z=c}$	0	0.02	0.01
$F_s$	73.18	68.16	73.19
$F_{abs}$	26.82	31.84	26.81
$F_i$	100	100	100

а также световой поток от источника, падающий на нижнюю грань  $F_i = \pi Fab$ .

Очевидно, что полный рассеянный световой поток  $F_s = F_{x=0} + F_{x=a} + F_{y=0} + F_{y=b} + F_{z=0} + F_{z=c}$ , а поглощенный средой световой поток  $F_{abs} = F_i - F_s$ .

Результаты численного эксперимента ( $\epsilon = 25, \Lambda = 0.95, F = 1, g = 0.99$ ) по определению потоков (в %), выходящих из каждой грани для параллелепипедов различных размеров, приведены в таблице.

**Заключение.** Получено решение уравнения переноса излучения в дисперсной среде ограниченного объема с линейной индикатрисой рассеяния. При этом использован переход к краевой задаче для модифицированного уравнения Гельмгольца, которая была решена методом Фурье с применением математического пакета MatLab. Решение УПИ представляется в виде суммы четырех слагаемых. Численными экспериментами показано, что помимо оптических характеристик среды на величину скалярного и направленных световых потоков существенное влияние оказывают границы среды.

Полученные результаты для характеристик рассеянного излучения могут быть использованы при решении различных прикладных задач, связанных с многократным рассеянием пучков светового излучения в природных дисперсных объектах, в том числе и в случаях, когда объем среды существенно ограничен и необходимо учитывать влияние границ на структуру рассеянного излучения.

**Обозначения**

$a$  и  $b$  — длина и ширина параллелепипеда;  $B_1(\mathbf{r}, \mathbf{\Omega})$  — функция источников;  $c$  — высота параллелепипеда;  $F_i$  — падающий световой поток;  $F_s$  и  $F_{abs}$  — рассеянный и поглощенный световые потоки;  $F_{x=0}, F_{x=a}, F_{y=0}, F_{y=b}, F_{z=0}, F_{z=c}$  — световые потоки, выходящие из граней  $x=0, x=a, y=0, y=b, z=0, z=c$  соответственно;  $J_0(\mathbf{r})$  — среднесферическая интенсивность диффузного излучения;  $J_1(\mathbf{r}), J_2(\mathbf{r}), J_3(\mathbf{r})$  — направленные световые потоки вдоль осей  $x, y, z$ ;  $\mathbf{n}_\Gamma$  — вектор нормали к границе среды;  $\mathbf{r}_\Gamma$  — точка границы среды;  $4\pi J_0(\mathbf{r})$  — скалярный поток излучения;  $\Gamma$  — граница среды;  $\epsilon$  — объемный показатель ослабления;  $\kappa(\mathbf{\Omega}, \mathbf{\Omega}')$  — индикатриса рассеяния света;  $\Lambda$  — альbedo однократного рассеяния;  $\mathbf{\Omega}$  — единичный вектор направления луча;  $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$  — направляющие косинусы вектора  $\mathbf{\Omega}$  относительно осей координат  $x, y, z$ . Индексы: abs — поглощенный; i — падающий; s — рассеянный.

**Литература**

1. Кейз К., Цвейфель П. Линейная теория переноса. М.: Мир, 1972.
2. Соболев В. Рассеяние света в атмосферах планет. М.: Наука, 1972.
3. Марчук Г. И., Лебедев В. И. Численные методы в теории переноса нейтронов. М.: Атомиздат, 1981.
4. Ку-Нан Лиоу. Основы радиационных пределов в атмосфере. Л.: Гидрометеиздат, 1984.
5. Перенос радиации в рассеивающих и поглощающих атмосферах: Пер. с англ./Под ред. Ж. Ленобль. Л.: Гидрометеиздат, 1990.
6. Мартинсон Л. К., Малов Ю. И. Дифференциальные уравнения математической физики. М.: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 1996.