УДК 517.925.3

Н. Ф. НАУМОВИЧ

ЗАМЕНА ВРЕМЕНИ В ВЕКТОРНОМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОМ УРАВНЕНИИ И ЕЕ ВЛИЯНИЕ НА ЗАКОН ПЛОЩАДЕЙ

Рассмотрим векторное дифференциальное уравнение $z'=h(z, \tau)$, $(z, \tau)\in ZT\subset \mathbf{R}^{n+m+1}$ в предположениях, изложенных в [1]. Выделяя основные и дополнительные координаты, функцию h представляем также и в виде $h=(f, g)$. Аналогично [2 и 3] вводим понятие секторной скорости $w(\tau)$ и доказываем, что $w(\tau)=\frac{1}{2}\sqrt{F(z(\tau), \tau)}$, $\tau\in t(\zeta, \sigma)$, где

$$F(z, \tau)=<f(z, \tau), f(z, \tau)>\cdot<x, x>-<x, f(z, \tau)>^2 \qquad (1)$$

и сохраняются понятия вырожденного и невырожденного законов площадей.

Для краткости изложения уравнение рассматриваем в области $ZT^*\subset ZT$, предполагая, что сечения областей ZT и ZT^* некоторой плоскостью $\tau=\sigma$ в пространстве $\mathbf{R}^{n+m+1}$ совпадают и что все решения уравнения

$$z'=h(z, \tau),\ (z, \tau)\in ZT^* \qquad (2)$$

с начальными значениями из ZT^* продолжимы до плоскости $\tau=\sigma$. В такой ситуации все промежутки $t(\zeta', \sigma')$, $(\zeta', \sigma')\in ZT^*$ имеют общую точку σ. Решение $z(\tau; \zeta, \sigma)$ уравнения (2) и его промежуток существования $t(\zeta, \sigma)$ обозначим соответственно $z(\tau; \zeta)$ и $t(\zeta)$, хотя уравнение (2) и не обязано быть стационарным.

Поскольку (2) однозначно разрешимо, то из соотношения $z=z(\tau, \zeta)$, $\zeta\in Z_\sigma$, $\tau\in t(\zeta)$, где Z_σ — сечение области ZT^* плоскостью $\tau=\sigma$, однозначно определяется векторная функция $\zeta=\omega(z, \tau)$, $\tau\in t(\zeta)$, $z\in Z_\sigma$, такая что $z(\tau, \omega(z, \tau))=z$. Вдоль каждого решения $z=z(\tau, \zeta)$ уравнения (2) выполняется тождество $\zeta=\omega(z(\tau, \zeta), \tau)$, которое означает, что составляющие $\omega_k(z, \tau)$ векторной функции ω являются интегралами (2) и образуют в совокупности базис множества всех интегралов (см., например, [4, с. 143]).

Зададим на ZT скалярную функцию φ непрерывную по (z, τ) и не обращающуюся в нуль на ZT. Поскольку ZT — область, то φ сохраняет знак. Произведем в уравнении (2) замену аргумента τ на аргумент $\tilde{\tau}$ по формуле

$$d\tilde{\tau}=d\tau/\varphi(z, \tau),\ (z, \tau)\in ZT^*. \qquad (3)$$

В итоге приходим к уравнению такого же типа

$$\frac{dz}{d\tilde{\tau}}=\tilde{h}(z, \tilde{\tau}),\ (z, \tilde{\tau})\in \widetilde{ZT}^*\subset\mathbf{R}^{n+m+1}. \qquad (4)$$

В дальнейшем все понятия для уравнения (4), являющиеся аналогами соответствующих понятий A для уравнения (2), обозначаем через

$\tilde{A}$. Например, $\tilde{t}(\zeta)$ — промежуток, на котором определено решение $\tilde{z}(\tilde{\tau}, \zeta)$ уравнения (4). Исключение составляют начальные значения соответствующих решений, которые имеют общее значение ζ.

Соотношение (3) означает, что

$$d\tilde{\tau} = d\tau/\varphi(z(\tau, \zeta), \tau), \ \tau \in t(\zeta), \tag{5}$$

т. е. вдоль каждого решения $z(\tau, \zeta)$ уравнения (2) аргумент τ преобразуется по своему собственному закону. Без ограничения общности можно считать, что при любом ζ значению $\tau=\sigma$ отвечает значение $\tilde{\tau}=\tilde{\sigma}$. Из соотношения (7) следует, что

$$\tilde{\tau} = \int_{\sigma}^{\tau} \frac{d\alpha}{\varphi(z(\alpha, \zeta), \alpha)} + \tilde{\sigma} =:: \tilde{\psi}(\tau, \zeta), \ (\tau, \zeta) \in ZT^*.$$

Функция $\tilde{\psi}(\tau,\zeta)$ монотонна по τ и непрерывна по (τ, ζ), поэтому существует обратная функция

$$\tau = \psi(\tilde{\tau}, \zeta), \zeta \in Z_\sigma, \ \tilde{\tau} \in \tilde{t}(\zeta). \tag{6}$$

Решение $z(\tau, \zeta)$ уравнения (2) после преобразования (5) принимает вид $z = z(\psi(\tilde{\tau}, \zeta), \zeta) =:: \tilde{z}(\tilde{\tau}, \zeta), \ \zeta \in Z_\sigma, \ \tilde{\tau} \in \tilde{t}(\zeta)$.

На основании однозначной разрешимости уравнения (2) и взаимно однозначного соответствия между τ и $\tilde{\tau}$ из соотношения $\tilde{z} = z(\psi(\tilde{\tau}, \zeta), \xi)$, $\zeta \in Z_\sigma$, $\tilde{\tau} \in \tilde{t}(\zeta)$ можно определить функцию

$$\zeta = \tilde{\omega}(\tilde{z}, \tilde{\tau}), \ (\tilde{z}, \tilde{\tau}) \in \widetilde{ZT}^*, \tag{7}$$

такую, что $z(\psi(\tilde{\tau}, \tilde{\omega}(\tilde{z}, \tilde{\tau})), \tilde{\omega}(\tilde{z}, \tilde{\tau})) = \tilde{z}(\tilde{\tau}, \tilde{\omega}(\tilde{z}, \tilde{\tau})) = \zeta$.

Для установления связи между функциями h и $\tilde{h}$ вычислим $\dfrac{\partial \tilde{z}(\tilde{\tau}, \zeta)}{\partial \tilde{\tau}}$.

Из формул (2), (5), (7) получаем: $\dfrac{\partial \tilde{z}(\tilde{\tau}, \zeta)}{\partial \tilde{\tau}} = \dfrac{\partial}{\partial \tilde{\tau}} z(\psi(\tilde{\tau}, \zeta)\zeta) = z'(\psi(\tilde{\tau}, \zeta), \zeta) \cdot \dfrac{d\tau}{d\tilde{\tau}} = h(z(\psi(\tilde{\tau}, \zeta), \zeta), \psi(\tilde{\tau}, \zeta)) \cdot \varphi(z(\psi(\tilde{\tau}, \zeta), \zeta), \psi(\tilde{\tau}, \zeta)) =$
$= h(\tilde{z}(\tilde{\tau}, \zeta), \psi(\tilde{\tau}, \tilde{\omega}(\tilde{z}(\tilde{\tau}, \zeta), \tilde{\tau}))) \varphi(\tilde{z}(\tilde{\tau}, \zeta), \psi(\tilde{\tau}, \tilde{\omega}(\tilde{z}(\tilde{\tau}, \zeta), \tilde{\tau})))$. Поэтому функция $z = \tilde{z}(\tilde{\tau}, \zeta)$ удовлетворяет соотношению $dz/d\tau = \varphi(z, \psi(\tilde{\tau}, \tilde{\omega}(z, \tilde{\tau})))h(z, \psi(\tilde{\tau}, \tilde{\omega}(z, \tilde{\tau})))$, $(z, \tilde{\tau}) \in \widetilde{ZT}^*$, и это позволяет заключить, что

$$\tilde{h}(z, \tilde{\tau}) = \varphi(z, \psi(\tilde{\tau}, \tilde{\omega}(z, \tilde{\tau})))\, h(z, \psi(\tilde{\tau}, \tilde{\omega}(z, \tilde{\tau}))). \tag{8}$$

Функции F и $\tilde{F}$ (см. (1)), вычисляемые соответственно для уравнений (2) и (4), на основании (8) связаны соотношением $\tilde{F}(z, \tilde{\tau}) = \varphi^2(z, \psi(\tilde{\tau}, \tilde{\omega}(z, \tilde{\tau})))\, F(z, \psi(\tilde{\tau}, \tilde{\omega}(z, \tilde{\tau})))$. Проведенные выше рассуждения и результаты (2) приводят к следующей теореме.

Теорема. Для того чтобы преобразование (3) с непрерывной по (z, τ) и не обращающейся в нуль на ZT скалярной функцией φ переводило уравнение (2) с функцией F, не равной тождественному нулю на ZT, в уравнение с невырожденным законом площадей, необходимо и достаточно, чтобы функция

$$u(z, \tilde{\tau}) = \varphi^2(z, \psi(\tilde{\tau}, \tilde{\omega}(z, \tilde{\tau}))) \cdot F(z, \psi(\tilde{\tau}, \tilde{\omega}(z, \tilde{\tau})))$$

являлась интегралом уравнения (4). (Функции ψ и $\tilde{\omega}$ определяются соответственно формулами (6) и (7)).

Пример. Рассмотрим систему

$$\begin{cases} x_1' = (1 + x_1 - x_2)(1 + \tau)^{-2}(1 + x_1 + \tau x_2), \\ x_2' = (1 + x_1 - x_2)(1 + \tau)^{-2}(1 + 2x_1 - x_2 + \tau x_1) \end{cases} \tag{9}$$

на множестве $ZT = \{(x_1, x_2, \tau) \mid x_1 - x_2 > 0, \tau \geqslant 0\}$.
Осуществим замену вида (3) по формуле

$$d\tilde{\tau} = \frac{1 + x_1 + x_2}{1 + \tau} d\tau, \ (x_1, x_2, \tau) \in ZT. \tag{10}$$

Из (9) следует, что $x_1 - x_2 = (\xi - \eta)/(1 + \tau(\xi - \eta))$, $\xi = x_1(0)$, $\eta = x_2(0)$. Тогда из (10) вытекает $d\tilde{\tau} = \dfrac{1 + \xi - \eta}{1 + \tau(1 + \xi - \eta)} d\tau \Rightarrow \tilde{\tau} = \ln(1 + \tau(1 + \xi - \eta))$ ($\tilde{\sigma}$ полагаем равным нулю). Поэтому $\tau = (e^{\tilde{\tau}} - 1)/(1 + \xi - \eta)$, $\tilde{x}_1 - \tilde{x}_2 = (\xi - \eta)/(1 + \tilde{\tau}(1 + \xi - \eta)) = (\xi - \eta)/e^{\tilde{\tau}}$, $\xi - \eta = (\tilde{x}_1 - \tilde{x}_2) e^{\tilde{\tau}}$ и, следовательно, $\tau = (e^{\tilde{\tau}} - 1)/(1 + (\tilde{x}_1 - \tilde{x}_2) e^{\tilde{\tau}})$. На основании (8) система (9) преобразуется к виду

$$\begin{cases} x_1' = x_1 + e^{-\tilde{\tau}}, \\ x_2' = 2x_1 - x_2 + e^{-\tilde{\tau}}, \ (x_1, x_2, \tilde{\tau}) \in \widetilde{ZT}, \end{cases} \tag{11}$$

где $\widetilde{ZT} = \{(x_1, x_2, \tilde{\tau}) \mid x_1 - x_2 > 0, \ \tilde{\tau} \geqslant 0\}$.

Функция $\tilde{F}$ для (11) имеет вид $\tilde{F}(x_1, x_2, \tilde{\tau}) = (2x_1^2 - 2x_1x_2 + (x_1 - x_2) e^{-\tilde{\tau}})^2$ и является интегралом (11), что означает наличие у (11) невырожденного закона площадей. Отметим, что (9) не обладает законом площадей.

Список литературы

1. Наумович Н. Ф. // Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1: Физ. Мат. Мех. 1984. № 2. С. 54.
2. Наумович Н. Ф. // Там же. № 1. С. 32.
3. Богданова М. Ю., Наумович Н. Ф. // Дифференц. уравнения. 1983. Т. 19. № 9. С. 1613.
4. Богданов Ю. С., Сыроид Ю. Б. Дифференц. уравнения. Минск, 1983.

Поступила в редакцию 18.06.84.