УДК 517.926

Н. Ф. НАУМОВИЧ

ВЫРОЖДЕННЫЕ СТАЦИОНАРНЫЕ УРАВНЕНИЯ С ЗАКОНОМ ПЛОЩАДЕЙ

Символом Z обозначаем либо пространство R^{n+m}, либо центрированное пространство $R^{n+m} \setminus \{O^{n+m}\}$, отнесенные к системе координат $O_{z_1 \dots z_{n+m}}$. Определим функцию h, $h: Z \to R^{n+m}$ и рассмотрим уравнение

$$z' = \frac{dz}{d\tau} = h(z), \ z \in Z, \ \tau \in R. \tag{1}$$

Предположим, что любая начальная задача для (1)

$$z|_{\tau=\sigma} = \xi, \ \xi \in Z, \ \sigma \in R \tag{2}$$

однозначно разрешима в дифференцируемых функциях (см., например, [1, с. 162]). Решение задачи (2) при $\sigma=0$ обозначим $z(\cdot, \xi)$, а его максимальный промежуток продолжимости обозначим $t(\xi)$. Решением задачи

(2) при любом σ служит функция $z(\tau-\sigma, \xi)$. Выделим в Z основные координаты $x_k=z_k$, $k=1, 2, \ldots, n$ и дополнительные координаты $y_j=z_{n+j}$, $j=1, 2, \ldots, m$. Положим $x=(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $y=(y_1, y_2, \ldots, y_m)$, $z=(x, y)$. В соответствии с таким распределением координат, уравнение (1) равносильно системе

$$\begin{cases} x'=f(x, y) \\ y'=g(x, y), \ (x, y)\in Z, \ h=(f, g), \end{cases} \tag{3}$$

а решение (1) представимо в виде $z=(x, y)$.

В [2] показано, что уравнение (1) обладает законом площадей в том и только в том случае, если функция

$$F(z)=\langle f(z), f(z)\rangle\langle x, x\rangle-\langle x, f(z)\rangle^2 \tag{4}$$

постоянна вдоль решений этого уравнения. При этом секторная скорость вычисляется по формуле

$$w(\tau)=\frac{1}{2}\sqrt{F(z(\tau))}, \ \tau\in t(\xi). \tag{5}$$

Все уравнения вида (1), обладающие законом площадей, можно разделить на два класса:

1) вдоль каждой траектории уравнения (1) секторная скорость постоянна, но принимает различные значения вдоль разных траекторий. В этом случае $F(x, y)=C$ представляет собой интеграл уравнения (1);

2) вдоль каждой траектории (1) секторная скорость принимает одно и то же постоянное значение w_0, тогда, согласно формуле (5), $F(z)=4w_0^2$ для любых $z\in Z$, т. е. F является тождественной постоянной на Z. Уравнение (1) в этом случае называем вырожденным. Вырожденное уравнение уже не имеет интеграла вида $F(z)=C$, такого как в (1).

Вырожденные уравнения также можно разделить на два класса: а) с нулевой секторной скоростью и б) с ненулевой секторной скоростью. В случае а) из [2] следует, что все траектории (1) лежат на связках лучей в R^n.

Имеет место следующая

Теорема. Если функция f ограничена в некоторой окрестности $U(O^{n+m})$ точки O^{n+m}, уравнение (1) вырождено и существует последовательность точек $(x^{(j)})$ какой-либо траектории x, сходящаяся к 0^n, то секторная скорость равна нулю.

Доказательство. Так как уравнение вырождено, то секторная скорость принимает одно и то же постоянное значение w_0 вдоль любой траектории уравнения (1). Рассмотрим траекторию, содержащую последовательность $(x^{(j)})$. В точках этой последовательности выполняется на основании (4) и (5) соотношение $4w_0^2=\langle f(x^{(j)}, y), f(x^{(j)}, y)\rangle\langle x^{(j)}, x^{(j)}\rangle-\langle x^{(j)}, f(x^{(j)}, y)\rangle$, $j=1, 2, \ldots$. Так как при $j\to+\infty$ $x^{(j)}\to 0^n$, а f ограничена в $U(O^{n+m})$, то каждое из слагаемых в последнем равенстве может быть сделано сколь угодно малым. Отсюда вытекает, что $w_0=0$, что и требовалось доказать.

В [2] также было показано (теорема 3): для того чтобы уравнение (1) было вырожденным с нулевой секторной скоростью, необходима и достаточна возможность представления функции f в виде $f(z)=\gamma(z)x$, $z\in Z$ со скалярной функцией γ.

В частности, при $n=2$, $m=0$ из последнего условия следует, что вырожденные системы второго порядка с нулевой секторной скоростью имеют вид $x_1'=\gamma(x_1, x_2)x_1$, $x_2'=\gamma(x_1, x_2)x_2$. Из вида этой системы следует, что $x_2dx_1=x_1dx_2$. И, следовательно, $x_1=Cx_2$, т. е. в этом случае система может быть проинтегрирована в квадратурах.

Также в [2] установлено, что в случае, когда f определена и ограничена в окрестности $U(O^{n+m})$ точки O^{n+m}, а система (1) является вырожденной, то секторная скорость равна нулю. Таким образом, из того, что (1) обладает ненулевой секторной скоростью w_0, вытекает, что либо f не определена в $U(O^{n+m})$, либо не является там ограниченной.

Пример 1. $$\begin{cases} x_1' = \dfrac{x_2}{x_1^2 + x_2^2}, \\ x_2' = -\dfrac{x_1}{x_1^2 + x_2^2}, \ (x_1, x_2) \in R^2 \setminus \{O^2\}. \end{cases}$$

Здесь $F(x_1, x_2) = \langle f, f \rangle \langle x, x \rangle - \langle x, f \rangle^2 = \left(\dfrac{x_2^2}{(x_1^2 + x_2^2)^2} + \dfrac{x_1^2}{(x_1^2 + x_2^2)^2} \right) (x_1^2 + x_2^2) - \left(\dfrac{x_1 x_2}{x_1^2 + x_2^2} - \dfrac{x_1 x_2}{x_1^2 + x_2^2} \right)^2 = 1$ для любых $(x_1, x_2) \in R^2 \setminus \{0^2\}$. Поэтому секторная скорость $w_0 = \frac{1}{2}$ вдоль любой траектории системы. Поскольку $x_1 dx_1 + x_2 dx_2 = 0$, то $x_1^2 + x_2^2 = C$ — интеграл системы.

Пример 2. $$\begin{cases} x_1' = \dfrac{2}{x_2}, \\ x_2' = \dfrac{1}{x_1}, \ (x_1, x_2) \in R^2, \ x_1 \neq 0, \ x_2 \neq 0. \end{cases}$$

Здесь $F(x_1, x_2) = \left(\dfrac{4}{x_2^2} + \dfrac{1}{x_1^2} \right) (x_1^2 + x_2^2) - \left(\dfrac{2x_1}{x_2} + \dfrac{x_2}{x_1} \right)^2 = 1$ для любых $(x_1, x_2) \in R^2$, $x_1 \neq 0$, $x_2 \neq 0$ и $w_0 = \frac{1}{2}$. Из системы следует, что $2x_1 dx_2 = x_2 dx_1$ и $x_2^2 = Cx_1$. В общем случае условие $F(z) = 4w_0^2$ для любого $z \in Z$, или, подробнее $\langle f, f \rangle \langle x, x \rangle - \langle x, f \rangle^2 = 4w_0^2$ позволяет строить вырожденные уравнения вида (1). Например, для случая $n = 2$, $m = 0$ $F(x_1, x_2) = (f_1^2 + f_2^2)(x_1^2 + x_2^2) - (x_1 f_1 + x_2 f_2)^2 = (x_1 f_2 - x_2 f_1)^2 = 4w_0^2$, или $|x_1 f_2 - x_2 f_1| = 2w_0$, $w_0 > 0$. Таким образом, для того чтобы система

$$\begin{cases} x_1' = f_1(x_1, x_2) \\ x_2' = f_2(x_1, x_2) \end{cases} \quad (x_1, x_2) \in Z \tag{6}$$

была вырожденной, необходимо и достаточно выполнение тождества

$$x_1 f_2 - x_2 f_1 = a, \ (a - \text{пост}), \ (x_1, x_2) \in Z. \tag{7}$$

Отсюда вытекает, что вырожденные системы второго порядка имеют вид

$$\begin{cases} x_1' = f_1(x_1, x_2) \\ x_2' = \dfrac{x_2 f_1(x_1, x_2) + a}{x_1}. \end{cases}$$

Для более подробного изучения рассматриваемого случая перейдем к полярным координатам $x_1 = r\cos\varphi$, $x_2 = r\sin\varphi$. Для системы (6) получим

$$\begin{cases} r' = f_1 \cos\varphi + f_2 \sin\varphi \\ r\varphi' = -f_1 \sin\varphi + f_2 \cos\varphi, \end{cases} \tag{8}$$

а условие (7) запишется в виде $\varphi' r^2 = a$. Отсюда следует, что при постоянном r φ' также постоянно. Это означает, что в точках пересечения траекторий системы (8) с окружностью радиуса R с центром в начале координат величины проекций векторного поля системы на касательные к данной окружности принимают постоянные значения, равные a/R^2. Если же рассмотреть величины проекций векторного поля системы на касательную к окружности в точках пересечения траекторий системы с лучом $\varphi = \varphi_0$, то в каждой точке величина проекции равна a/r^2.

ЛИТЕРАТУРА

1. Богданов Ю. С. Лекции по дифференциальным уравнениям.— Минск, 1977.
2. Богданова М. Ю., Наумович Н. Ф.— Дифференц. уравнения, 1983, т. 19, № 9, с. 1613.

Поступила в редакцию
12.04.82.

Кафедра высшей математики ФПМ