УДК 517.925

М. Ю. БОГДАНОВА, Н. Ф. НАУМОВИЧ

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ С ЗАКОНОМ ПЛОЩАДЕЙ

Закон площадей. Рассмотрим уравнение ($'=d/d\tau$)

$$z' = h(z);\ z = (x,\ y);\ h(f,\ g);\ x,\ f \in R^n;\ y,\ g \in R^m, \tag{1}$$

на множестве Z, совпадающем с R^{n+m}, за исключением разве лишь гиперплоскости $x=O^n$. Предположим, что любая начальная задача

$$z|_{\tau=0} = \zeta, \quad \zeta = (\xi,\ \eta) \in Z \tag{2}$$

однозначно разрешима (см., например, [1, с. 162]). Обозначим $z=(x,\ y)$ решение задачи (2), t — максимальный интервал существования решения z.

Допустим, что τ, $\tau+\Delta\tau \in t$, обозначим Δs площадь криволинейного сектора в R^n, образованного радиус-вектором точки $x(\sigma)$ при изменении σ от τ до $\tau+\Delta\tau$. Предел $\Delta s/\Delta\tau$ при $\Delta\tau \to 0$ назовем секторной скоростью на траектории x фазового графика z в момент τ и обозначим $w(\tau)$. Если для любого фиксированного $\zeta \in Z$ функция w является постоянной

$$w(\tau) = w_\zeta, \tag{3}$$

то скажем, что уравнение (1) обладает законом площадей. Такой термин в аналогичной ситуации используется в небесной механике (см., например, [2, с. 271, 327]).

Вычисление секторной скорости. Дальше рассматриваем лишь такие уравнения (1), у которых составляющая x любого решения z на каждой компактной части промежутка t обращается в O^n разве лишь на конечной совокупности замкнутых промежутков. Указанным свойством обладают, в частности, уравнения (1) с функциями h, голоморфными в окрестности O^{n+m}. Выведем формулу для вычисления секторной скорости w.

Если $x(\tau)\neq O^n$, то существует интервал t^*, $\tau\in t^*\subset t$, на котором x не обращается в O^n. Обозначим $\alpha(\tau, \sigma)$ угол между радиус-векторами точек $x(\tau)$ и $x(\sigma)$:

$$\cos\alpha(\tau, \sigma) = (x(\tau), x(\sigma))/(|x(\tau)|\cdot|x(\sigma)|) \tag{4}$$

(см., например, [3, с. 104]), причем считаем $\alpha(\tau, \sigma)\geqslant 0$ при $\tau>\sigma$ и $\alpha(\tau, \sigma)=-\alpha(\sigma, \tau)$. В достаточно малой окрестности диагонали $\sigma=\tau$ в качестве $\alpha(\tau, \sigma)$ можно выбрать дифференцируемую функцию. Если же $x(\tau)=O^n$, то полагаем $\alpha(\tau, \sigma)=0$ при любом $\sigma\in t$. Построенная функция в достаточно малой окрестности диагонали квадрата $t^*\times t^*$ будет кусочно-непрерывной.

Возьмем любое $\tau\in t$. Разобьем отрезок $[0, \tau)$ на ν частей точками $0=\tau_0<\ldots<\tau_{k-1}<\tau_k<\ldots<\tau_n=\tau$; $\delta=\max\limits_k\{\tau_k-\tau_{k-1}\}$. В силу непрерывности функции α существует предел $\psi(\tau)=\lim\limits_{\delta\to 0}\sum\limits_{k=1}^{\nu}\alpha(\tau_k, \tau_{k-1})$, причем ψ является непрерывной кусочно-дифференцируемой на t. Если вместо ζ взять другую точку $\zeta^*\in z$, то $\psi^*(\tau)=\psi(\tau)+\psi_0$, где ψ_0 — постоянная.

Лемма. *Во всех точках дифференцируемости* ψ *выполняется*

$$w(\tau)=\frac{1}{2}|x(\tau)|^2\psi'(\tau) \tag{5}$$

или

$$w(\tau)=\frac{1}{2}((f(z(\tau)), f(z(\tau)))(x(\tau), x(\tau))-(x(\tau), f(z(\tau)))^2)^{1/2}. \tag{6}$$

Схема доказательства для случая $\tau=0$. Если $\xi=O^n$, то формулы (5), (6) очевидны. При $\xi\neq O^n$, $\Delta\tau\in t^*$ и $\Delta\tau\to 0$ выполняется

$$\Delta\psi=\psi(\Delta\tau)-\psi(0)=\psi'(0)\Delta\tau+o(\Delta\tau). \tag{7}$$

Далее

$$\Delta s=\frac{1}{2}\ \xi+\Delta x|\cdot|\xi|\sin\Delta\psi+o(\Delta\tau) \tag{8}$$

см., например, [4, с. 194 — 197; 5, с. 97 — 98]). Из (7) и (8) следует (5) и на основании (4) и (8)

$$\frac{\Delta s}{\Delta\tau}=\frac{1}{2}\left(\xi^2\left(\frac{\Delta x}{\Delta\tau}\right)^2-\left(\xi, \frac{\Delta x}{\Delta\tau}\right)^2\right)^{1/2}+o(1),$$

что и доказывает (6). При $\tau\neq 0$ рассуждения аналогичны.

Траектории с нулевой секторной скоростью. Связкой лучей в R^n назовем не более чем счетное непустое множество лучей из R^n с общей вершиной O^n.

Теорема 1. *Тождественное обращение секторной скорости* w *в нуль вдоль траектории* x *необходимо и достаточно для того, чтобы траектория* x *лежала на связке лучей в* R^n.

Доказательство. Необходимость. Весь промежуток t распадается на относительно замкнутое множество t^0, где $x(\tau)=O^n$, и на совокупность (не более чем счетную) дополнительных интервалов $\{t^i\}$, где $x(\tau)\neq O^n$. Если $\tau\in t^i$, то соответствующий участок траектории лежит на одном из лучей из связки, поэтому $\psi(\sigma)=\mathrm{const}$, $\sigma\in t^i$, и $w(\tau)=0$ на основании (5). Если же $\tau\in t^0$, то $x(\tau)=O^n$ и $w(\tau)=0$ по определению w.

Достаточность. На каждом из интервалов t^i выполняется тождество $w(\tau)=0$, и поэтому $\psi'(\sigma)=0$ на основании (5). Следовательно, $\psi(\sigma)=\mathrm{const}$, но $\psi(\tau)=0$, и поэтому $\psi(\sigma)=0$ или $\alpha(\tau, \sigma)=0$, что и означает расположение соответствующего участка траектории на луче с направлением радиус-вектора точки ξ. При $\tau\in t^0$ точка $x(\tau)$ располагается на вершине связки.

Замечания о траекториях с нулевой секторной скоростью: 1) в связке лучей полностью покрываться траекторией могут только два «крайних» луча; 2) переход траектории с одного луча на другой происходит только через точку O^n; 3) если $Z\neq R^{n+m}$, то траектория лежит на одном единственном луче; 4) если $m=0$, то вся траектория лежит на одной прямой; 5) если $m=0$ и $n=2$, то траектория лежит на луче, примыкающем к O^n.

Пример 1. Все траектории системы $x'=\lambda x$, $y'=g(x, y)$, $x\in R^n$, $y\in R^m$, где $\lambda\in R$, лежат на связке лучей в R^n и поэтому обладают нулевой секторной скоростью.

Теорема 2. *Пусть функция* f *ограничена в некоторой окрестности точки* O^{n+m}. *Если секторная скорость вдоль траектории* x *постоянна и если существует последовательность точек из* x, *сходящаяся к* O^n, *то данная траектория лежит на связке лучей.*

Доказательство. Каждое слагаемое в правой части (6) для траектории x может быть сделано сколь угодно малым. Следовательно, секторная скорость вдоль x равна 0, что позволяет применить теорему 1.

Пример 2. Если $m=0$, $n=2$, система линейна и однородна

$$x_1'=a_{11}x_1+a_{12}x_2,\quad x_2'=a_{21}x_1+a_{22}x_2, \tag{9}$$

то в случае фокуса ни одна из траекторий ненулевых решений не обладает постоянной секторной скоростью.

Следующий пример показывает существенность ограниченности f.

Пример 3. Система ($r^2 = x_1^2 + x_2^2$)

$$x_1' = -(x_2 + x_1^3 + x_1 x_2^2)\, r^{-2}, \quad x_2' = (x_1 - x_1^2 x_2 - x_2^3)\, r^{-2} \tag{10}$$

в полярных координатах имеет вид $(r,\ \varphi)$ $r' = -r$, $\varphi' = \dfrac{1}{r^2}$ и обладает решением $r = \exp(-\tau)$, $\varphi = -\dfrac{1}{2}\exp(2\tau)$, секторная скорость которого $w_s = 1/2$ (см. (3)), хотя $r(\tau) \to 0$ при $\tau \to +\infty$.

Уравнения с постоянной секторной скоростью. Определим на Z неотрицательную функцию

$$F(z) = (f(z),\ f(z))(x,\ x) - (x,\ f(z))^2.$$

Соотношение (6) в этом случае принимает вид

$$w(\tau) = \frac{1}{2}\sqrt{F(z(\tau))}, \quad \tau \in t. \tag{11}$$

Теорема 3. *Для равенства нулю секторной скорости вдоль любой траектории уравнения (1) необходима и достаточна возможность представления функции f в виде*

$$f(z) = \gamma(z)\, x, \quad z \in Z \tag{12}$$

со скалярной функцией γ.

Доказательство следует из соотношения (11) и свойств неравенства Коши—Буняковского [3, с. 95—96] (ср. пример 1).

Пример 4. Для системы (9) секторная скорость вдоль любой траектории равна нулю, если имеется дикритический узел или если все коэффициенты системы равны нулю.

Теорема 4. *Пусть функция f ограничена в некоторой окрестности O^{n+m}. Если все траектории уравнения (1) обладают одной и той же постоянной секторной скоростью w_0, то $w_0 = 0$, и функция f представима в виде (12).*

Доказательство вытекает из теоремы 3 и того, что в силу ограниченности f существует нулевой предел у F при $z \to O^{n+m}$, поэтому через окрестность O^n проходят траектории со сколь угодно малой секторной скоростью, что возможно лишь при $w_0 = 0$.

Следующий пример показывает, что при неограниченности f все траектории могут иметь одну и ту же ненулевую секторную скорость w_0.

Пример 5. Система $x_1' = -x_2 r^{-2}$, $x_2' = x_1 r^{-2}$ в полярных координатах имеет вид $r' = 0$, $\varphi' = r^{-2}$ и обладает траекториями с постоянной секторной скоростью $w_0 = 1/2$.

Уравнения с законом площадей. Построим условия, при выполнении которых уравнение (1) обладает законом площадей.

Теорема 5. *Уравнение (1) обладает законом площадей в том и только в том случае, если функция F постоянна вдоль решений этого уравнения.*

Доказательство следует из соотношения (11).

Следствие 1. *Если функция F отлична от постоянной на Z, то для наличия закона площадей у (1) необходимо и достаточно, чтобы F была интегралом этого уравнения. Если, кроме того, функция f является полиномом, то необходимым условием наличия закона площадей у (1) будет существование полиномиального интеграла.*

Обстоятельство, отмеченное в следствии 1 теоремы 5, связывает теорию уравнений с законом площадей и с алгебраическими интегралами [6, 7].

Если F — тождественная постоянная, то уравнение назовем вырожденным.

Следствие 2 (указано рецензентом). *Уравнение $dz/d\tau = h(z)\,\varphi(z)$ обладает законом площадей тогда и только тогда, когда будет $\varphi = \sqrt{u/F}$, где u — некоторый интеграл уравнения (1) (в частности, если F — интеграл, то и φ — то же).*

Действительно, при умножении h на φ функция F приобретает множитель φ^2, а интегралы не изменяются, и по следствию 1 необходимо и достаточно, чтобы функция $u = F\varphi^2$ была интегралом.

Дальше предполагаем, что функция f дифференцируема на Z. Символом df/dz обозначаем $n \times (n+m)$-матрицу (df_k/dz_j).

Критерий закона площадей. Для наличия закона площадей у уравнения (1) необходимо и достаточно выполнения тождества

$$\left(\frac{\partial f}{\partial z} h(z),\ f(z)\right)(x,\ x) - (x,\ f(z))\left(x,\ \frac{\partial f}{\partial z} h(z)\right) = 0, \quad z \in Z.$$

Доказательство. Наличие закона площадей на основании теоремы 5 равносильно тому, что для любых $\xi \in Z$ и $\tau \in t$ выполняется

$$\frac{d}{d\tau} F(z(\tau)) = 0$$

или

$$\frac{d}{d\tau} F(z(\tau)) = 2\left(\frac{\partial f(z(\tau))}{\partial z} h(z(\tau)),\ f(z(\tau))\right)(x(\tau),\ x(\tau)) -$$
$$- 2(f(z(\tau)),\ x(\tau))\left(\frac{\partial f(z(\tau))}{\partial z} h(z(\tau)),\ x(\tau)\right) = 0,$$

откуда и следует утверждение теоремы.

Выделение систем с законом площадей. Критерий закона площадей позволяет не только устанавливать наличие или отсутствие закона площадей, но также (в первом случае) фактически строить интеграл уравнения (1). Кроме того, с помощью критерия можно выделять классы уравнений с законом площадей.

Рассмотрим, например, систему с постоянными коэффициентами

$$x_1' = a_1x_1 + a_2x_2 + a_3y_1,\quad x_2' = b_1x_1 + b_2x_2 + b_3y_1,\quad y_1' = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3y_1 \tag{13}$$

и поставим задачу выделить системы с законом площадей. Критерий закона площадей приводит в данном случае к условию

$$x_1x_2'' - x_2x_1'' = 0, \tag{14}$$

где x_1'' и x_2'' вычисляются в силу (13). Оказывается, искомые системы в невырожденном случае имеют вид

$$\begin{aligned} x_1' &= (\alpha a + c - \beta b)\,x_1 + \beta a x_2 + a y_1,\\ x_2' &= \alpha b x_1 + c x_2 + b y_1,\\ y_1' &= (\alpha\beta b - 2\alpha c - \alpha^2 a)\,x_1 + (\beta^2 b - 2\beta c - \alpha\beta a)\,x_2 - (\alpha a + c)\,y_1 \end{aligned} \tag{15}$$

или

$$x_1' = \mu x_1 + \nu x_2,\quad x_2' = \delta x_1 - \mu x_2,\quad y_1' = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3y_1, \tag{16}$$

или являются вырожденными вида $x_1' = \mu x_1$, $x_2' = \mu x_2$, $y_1' = c_1x_1 + c_2x_2$ с произвольными параметрами a, b, c, α, β, μ, ν, δ, c_1, c_2, c_3. Общие интегралы систем (15) и (16) соответственно равны $\alpha b x_1^2 - \beta a x_2^2 - (\alpha a - \beta b)\,x_1x_2 - a x_2 y_1 + b x_1 y_1 = C$ и $\delta x_1^2 - 2\mu x_1 x_2 - \nu x_2^2 = C$. Характеристическое уравнение для (15) имеет вид $(\lambda - \gamma)^2(\lambda + \gamma) = 0$, где $\gamma = c - \beta b$, для (16) имеет вид $(c_3 - \lambda)(\lambda^2 - a^2 - bc) = 0$.

Аналогичным образом выделяем из систем

$$x_1' = (a_{00} + a_{10}x_1 + a_{01}x_2 + a_{20}x_1^2 + a_{11}x_1x_2 + a_{02}x_2^2)\,r^{-2},$$
$$x_2' = (b_{00} + b_{10}x_1 + b_{01}x_2 + b_{20}x_1^2 + b_{11}x_1x_2 + b_{02}x_2^2)\,r^{-2}$$

системы с законом площадей (a, b, α, β — произвольные постоянные параметры)

$$x_1' = (a x_1 + b x_2 + \alpha x_1^2 + \beta x_1 x_2)\,r^{-2},$$
$$x_2' = (-b x_1 + a x_2 + \alpha x_1 x_2 + \beta x_2^2)\,r^{-2}. \tag{17}$$

Функция $F(z)$ в этом случае тождественно равна b^2 и интеграл вида $F(z) = C$ отсутствует. При $b \neq 0$ соотношение

$$\frac{1}{r} = C\exp\left(\frac{a}{b}\varphi\right) + \frac{\alpha b - \beta a}{a^2 + b^2}\sin\varphi - \frac{\alpha a + \beta b}{a^2 + b^2}\cos\varphi$$

приводит к общему интегралу (в полярных координатах). При $b = 0$ система (17) имеет прямую покоя $a + \alpha x_1 + \beta x_2 = 0$ и общий интеграл $x_2/x_1 = C$.

Критерий закона площадей, примененный к системам вида

$$x_1' = (a_{00} + a_{10}x_1 + a_{01}x_2 + a_{20}x_1^2 + a_{11}x_1x_2 + a_{02}x_2^2)\,r^{-4},$$
$$x_2' = (b_{00} + b_{10}x_1 + b_{01}x_2 + b_{20}x_1^2 + b_{11}x_1x_2 + b_{02}x_2^2)\,r^{-4}, \tag{18}$$

выделяет из класса (18) системы с законом площадей

$$x_1' = (\alpha x_1 + p x_1^2 + q x_1 x_2)\,r^{-4},\quad x_2' = (\alpha x_2 + p x_1 x_2 + q x_2^2)\,r^{-4}, \tag{19}$$

$$x_1' = (\mu x_1^2 - 2\nu x_1 x_2 - \mu x_2^2)\,r^{-4},\quad x_2' = (\nu x_1^2 + 2\mu x_1 x_2 - \nu x_2^2)\,r^{-4}, \tag{20}$$

$$x_1' = \beta x_2 r^{-4},\quad x_2' = -\beta x_1 r^{-4}. \tag{21}$$

Система (19) имеет прямую покоя $\alpha + p x_1 + q x_2 = 0$ и интеграл $x_2/x_1 = C$, система (20) обладает интегралом $(\nu x_1 + \mu x_2)r^{-2} = C$, система (21) имеет интеграл $\beta r^{-2} = C$.

Литература

1. Богданов Ю. С. Лекции по дифференциальным уравнениям.— Минск: Вышэйшая школа, 1977.— 240 с.

2. Аппель П. Теоретическая механика, т. 1.— М.: Наука, 1960.— 515 с.

3. Воеводин В. В. Линейная алгебра.— М.: Наука, 1974.— 336 с.

4. Кудрявцев Л. Д. Математический анализ, т. 2.— М.: Высшая школа, 1973.— 470 с.

5. Бураго Ю. Д., Залгаллер В. А. Геометрические неравенства.— Л.: Наука, 1980.— 288 с.

6. Сибирский К. С.— Дифференц. уравнения, 1972, т. 8, № 12, с. 2211—2214.

7. Сибирский К. С. Алгебраические инварианты дифференциальных уравнений и матриц.— Кишинев: Штиинца, 1976.— 268 с.

Белорусский государственный университет им. В. И. Ленина

Поступила в редакцию 4 марта 1982 г.