УДК 517.948.32 : 517.544

Н. Ф. НАУМОВИЧ

ИСКЛЮЧИТЕЛЬНЫЕ СЛУЧАИ ОБОБЩЕННОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ РИМАНА С СОПРЯЖЕНИЕМ

В настоящей статье будет исследована краевая задача

$$\varphi^+(t) = a(t)\,\varphi^-(t) + b(t)\,\overline{\varphi^-(t)} + c(t) \text{ на } \Gamma \tag{A}$$

в случае, когда ее коэффициенты могут обращаться в нуль или бесконечность целого порядка. Этот вопрос при условии ограниченности решения на контуре исследован Н. Юханоновым [6]. Здесь задача будет решена в более широких классах функций с допустимыми бесконечностями неинтегрируемого порядка.

§ 1. Будем предполагать, что в задаче (А) коэффициенты $a(t)$ и $b(t)$ представимы следующим образом:

$$a(t) = \frac{\prod\limits_{i=1}^{\alpha}(t-a_i)^{\nu_i}}{\prod\limits_{j=1}^{\beta}(t-b_j)^{\pi_j}}\,a_1(t),\quad b(t) = \frac{\prod\limits_{i=1}^{\delta}(t-a_i)^{\mu_i}}{\prod\limits_{j=1}^{n}(t-b_j)^{\omega_j}}\,b_1(t), \tag{1}$$

где ν_i, π_j, μ_i, ω_j — целые положительные числа, $a_1(t)$ и $b_1(t)$ удовлетворяют условию Гельдера, кроме точек c_k, где $a_1(t)$ имеет разрывы первого рода, и $\mu_i \geqslant \nu_i$, $\omega_j \leqslant \pi_j$, $\alpha \leqslant \delta$, $\beta \geqslant n$. Функция $c(t)$ удовлетворяет условию Гельдера.

Рассмотрим класс функций H_{pqr}, введенный Л. А. Чикиным [5]. Кусочно-голоморфная функция $\Phi(z)$ принадлежит классу H_{pqr}, если в окрестности точек $a_1, \ldots, a_p$ и $b_1, \ldots, b_q$ одна из функций $\Phi^+(z)$ или $\Phi^-(z)$ может обращаться в бесконечность целого порядка, в окрестностях точек $c_1, \ldots, c_r$ обе функции $\Phi^+(z)$ и $\Phi^-(z)$ могут обращаться в бесконечность порядка меньше единицы, в окрестностях остальных критических точек $\Phi^+(z)$ и $\Phi^-(z)$ остаются ограниченными.

Задачу в обобщенной постановке сформулируем так: дан простой гладкий контур Γ; на нем заданы функции $a(t)$, $b(t)$, $c(t)$, определяемые формулой (1) и дифференцируемые в окрестностях точек a_i, b_j. Требуется найти кусочно-голоморфную функцию $\varphi(z)$, принадлежащую классу H_{pqr} и исчезающую на бесконечности, если ее граничные значения удовлетворяют на Γ условию (А). Для решения этой задачи воспользуемся методом, изложенным в цитированной работе Л. А. Чикина.

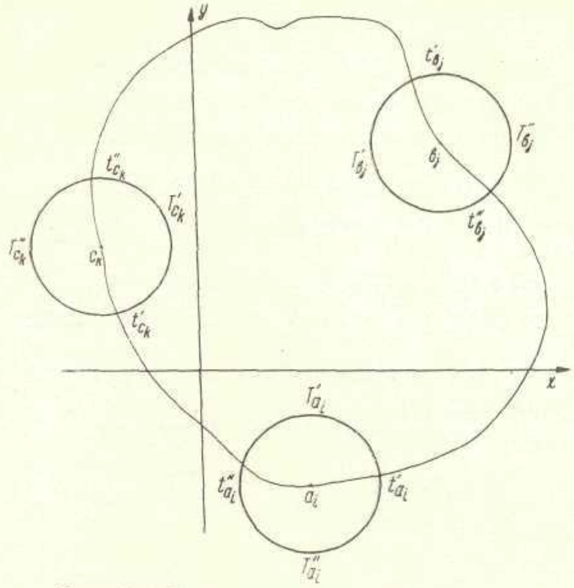
§ 2. Рассмотрим задачу (А) в предположении, что $|a(t)| > |b(t)|$ (эллиптический случай). Для нее построим так называемую приведенную задачу

$$\varphi_0^+(t) = a_0(t)\,\varphi_0^-(t) + b_0(t)\,\overline{\varphi_0^-(t)} + c_0(t) \text{ на } \Gamma_0. \tag{A$_n$}$$

Для этого проводим окружности с центрами в особых точках коэффициентов $a(t)$, $b(t)$ и $c(t)$ достаточно малого радиуса ε и заменяем контур Γ контуром Γ_0, который символически можно записать так:

$$\Gamma_0 = \Gamma' + \sum_{i=1}^{\alpha} T_{a_i} + \sum_{j=1}^{n} T_{b_j} + \sum_{k=1}^{\gamma} T_{c_k}. \tag{2}$$

Γ' получается из Γ удалением дуг $t't''$. $\sum\limits_{i=1}^{\alpha} T_{a_i}$ и другие суммы из (2) обозначают совокупность дуг окружностей T (рис. 1). Эти дуги выбираем по



Способ выбора приведенного контура Γ_0

правилу: для нулей $a_1, \ldots, a_p$ берутся дуги $T''_{a_1}, \ldots, T''_{a_p}$, для нулей $a_{p+1}, \ldots, a_\alpha$ — дуги $T'_{a_{p+1}}, \ldots, T'_{a_\alpha}$; для полюсов $b_1, \ldots, b_q$ берутся дуги $T'_{b_1}, \ldots, T'_{b_q}$, для $b_{q+1}, \ldots, b_\beta$ — дуги $T''_{b_{q+1}}, \ldots, T''_{b_\beta}$; для точек разрыва $c_1, \ldots, c_r$ берутся дуги $T''_{c_1}, \ldots, T''_{c_r}$, для остальных точек разрыва — дуги T'. T' обозначает дугу окружности T, принадлежащую D^+, T'' — дугу окружности T, принадлежащую D^-. На этом контуре определяем коэффициенты $a_0(t)$, $b_0(t)$, $c_0(t)$:

$$a_0(t) = \begin{cases} a(t) & \text{при } t \in \Gamma', \\ (t-a_i)^{\nu_i} F_{a_i}(t) & \text{при } t \in T_{a_i} \quad i = 1, \ldots, \alpha, \\ (t-b_j)^{-\pi_j} F_{b_j}(t) & \text{при } t \in T_{b_j} \quad j = 1, \ldots, n, \\ F_{c_k}(t) & \text{при } t \in T_{c_k} \quad k = 1, \ldots, \gamma, \end{cases}$$

$$b_0(t) = \begin{cases} b(t) & \text{при } t \in \Gamma', \\ (t-a_i)^{\mu_i} \Psi_{a_i}(t) & \text{при } t \in T_{a_i} \quad i = 1, \ldots, \alpha, \\ (t-b_j)^{-\pi_j} \Psi_{b_j}(t) & \text{при } t \in T_{b_j} \quad j = 1, \ldots, n, \\ \Psi_{c_k}(t) & \text{при } t \in T_{c_k} \quad k = 1, \ldots, \gamma, \end{cases} \tag{3}$$

$$c_0(t)=\begin{cases} c(t) & \text{при } t\in\Gamma', \\ \Omega_{\mathrm{I}}(t) & \text{при } t\in T', \\ \Omega_{\mathrm{II}}(t) & \text{при } t\in T''. \end{cases} \tag{3}$$

F_{a_i}, F_{b_j}, F_{c_k}, Ψ_{a_i}, Ψ_{b_j}, Ψ_{c_k}, Ω_{I}, Ω_{II} принадлежат семейству дробно-линейных функций $\varphi(z)$, определенных равенством

$$\frac{\varphi(z)-f(t')}{\varphi(z)-f(t'')}=A\,\frac{z-t'}{z-t''}. \tag{4}$$

A — произвольная постоянная; $f(t)=(t-\tau)^d\,m(t)$, где τ может принимать значения a_i и b_j, d — значения 0, $-\nu_i$, π_j, $-\mu_i$, ω_j, а $m(t)$ — значения $a(t)$, $b(t)$, $c(t)$. Путем выбора A можно добиться того, что для функции $\varphi(z)$, построенной по $f(t)=(t-a_i)^{-\nu_i}\,a(t)$, и для $\varphi^*(z)$, построенной по $f(t)=(t-a_i)^{-\mu_i}\,b\;t)$, будут выполняться неравенства

$$|\varphi_{\mathrm{II}}(t)|>|\varphi^*_{\mathrm{II}}(t)| \text{ и } |\varphi_{\mathrm{I}}(t)|>|\varphi^*_{\mathrm{I}}(t)|, \tag{5}$$

где φ_{I}, φ_{II}, φ^*_{I}, φ^*_{II} — функции, определенные на дугах T' и T'' окружностей.

Приведенная задача (A_0) будет эллиптической. Это следует из (3) и (5), а также из того, что радиус $\varepsilon>0$ окружностей мы можем выбирать как угодно малым.

Задача (A_0) будет уже неособенной, и поэтому к ней применимы результаты Л. Г. Михайлова [3].

1. $\varkappa=0$. Решение задачи определяется формулой

$$\varphi_0^{\pm}(z)=X_0^{\pm}(z)\,\psi_0^{\pm}(z), \tag{6}$$

где X_0^{+} — каноническая функция, а

$$\psi_0(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{\mu_0(\tau)}{\tau-z}\,d\tau. \tag{7}$$

В свою очередь $\mu_0(t)$ можно определить из интегрального уравнения

$$\mu_0(t)=\frac{b_0(t)\,\overline{X_0^-(t)}}{a_0(t)\,X_0^-(t)}\cdot\frac{1}{2}\,\left(\overline{-\mu_0(t)+S_{\mu_0}(t)}\right), \tag{8}$$

где

$$S_\mu\equiv\frac{1}{\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{\mu(\tau)}{\tau-t}\,d\tau.$$

Покажем, что $\varphi(z)=\lim\limits_{\Gamma_0\to\Gamma}\varphi_0(z)$ будет принадлежать классу H_{pqr}.

Предположим, что у $a(t)$ есть только точки разрыва первого рода c_k $(k=1,\ \ldots,\ \gamma)$. Поведение канонической функции было исследовано Н. И. Мусхелишвили [4]. Следуя ему, можно записать

$$X(z)=\begin{cases} (z-c_k)^{\lambda_k+il_k}\,e^{\Theta^+(t)} & \text{при } z\in D^+, \\ (z-c_k)^{\lambda_k+il_k}\,e^{\Theta^-(t)} & \text{при } z\in D^-, \end{cases} \tag{9}$$

где $\lambda_k=\dfrac{1}{2\pi}\,[\arg a(c_k+0)-\arg a(c_k-0)]_\Gamma$, $\Theta(z)$ — ограниченная функция. Для точек c_k, определяющих класс решения, λ_k удовлетворяет условию $-1<\lambda_k<0$, а для остальных c_k $0<\lambda_k<1$.

Сопоставляя (6), (7), (8), (9), заключаем, что в этом случае $\varphi(z)$ будет принадлежать классу H_{pqr}.

Пусть теперь $a(t)$ имеет вид (1), исключая точки разрыва. $X(z)$ можно получить по формуле

$$X(z)=\begin{cases}\dfrac{\prod\limits_{i=p+1}^{\alpha}(z-a_i)^{\nu_i}}{\prod\limits_{j=1}^{q}(z-b_j)^{\pi_j}}\,X_1^+(z) \text{ при } z\in D^+,\\[2ex] \dfrac{\prod\limits_{j=q+1}^{\beta}(z-b_j)^{\pi_j}}{\prod\limits_{i=1}^{p}(z-a_i)^{\nu_i}}\,X_1^-(z) \text{ при } z\in D^-.\end{cases} \tag{10}$$

Функция $\psi(z)$ будет ограничена в точках $a_1, \ldots, a_p, b_1, \ldots, b_q$ и будет иметь особенности целого неинтегрируемого порядка в точках $a_{p+1}, \ldots, a_\alpha$ и $b_{q+1}, \ldots, b_\beta$. Функция $\varphi^+(z)$ будет ограничена в точках $a_1, \ldots, a_\alpha$, $b_{q+1}, \ldots, b_\beta$ и будет иметь особенности неинтегрируемого порядка в точках $b_1, \ldots, b_q$. Функция $\varphi^-(z)$ будет ограничена в точках $b_1, \ldots, b_q$ и будет иметь особенности неинтегрируемого порядка в точках $a_1, \ldots, a_\alpha$. Для того чтобы функция $\varphi(z)$ принадлежала классу H_{pqr}, необходимо на $\varphi^-(z)$ наложить $\nu_p=\sum\limits_{i=p+1}^{\alpha}\nu_i$ условий разрешимости, чтобы она в точках $a_{p+1}, \ldots, a_\alpha$ стала ограниченной.

Итак, в этом случае задача (А) имеет решение лишь при выполнении ν_p условий разрешимости.

2. $\varkappa>0$. Обозначим через $P_0(z)$ полином степени $\varkappa-1$ с произвольными коэффициентами. Полагая

$$\psi_0^-(z)=\varphi_0^-(z),\quad \psi_0^+(z)=z^{-\varkappa}\left[\varphi_0^+(z)-P_0(z)\right]$$

(начало координат предполагается находящимся в D^+), получим задачу

$$\psi_0^+(t)=a_{10}(t)\,\psi_0^-(t)+b_{10}(t)\,\overline{\psi_0^-(t)}+c_{10}(t), \tag{A$_{10}$}$$

где

$$a_{10}(t)=t^{-\varkappa}a_0(t),\quad b_{10}(t)=t^{-\varkappa}b_0(t),\quad c_{10}(t)=t^{-\varkappa}\left[c_0(t)-P_0(t)\right].$$

Очевидно, что

$$\operatorname{Ind} a_{10}(t)=0,\quad \left|\frac{b_{10}(t)}{a_{10}(t)}\right|=\left|\frac{b_0(t)}{a_0(t)}\right|.$$

Получаем уже исследованный случай.

3. $\varkappa<0$. Все сказанное для $\psi_0^+(z)$ остается справедливым, но $\varphi^+(z)=z^{\varkappa}\psi^+(z)$ в точке $z=0$ будет иметь полюс. Для его аннулирования необходимо наложить дополнительное условие, чтобы $\psi^+(z)$ имела при $z=0$ нуль порядка $|\varkappa|$. Это приводит к $|\varkappa|$ условиям разрешимости.

Теорема 1. *Пусть на простом гладком контуре* Γ *задано краевое условие* (*А*) *и*

$$\sup\left|\frac{b(t)}{a(t)}\right|<\frac{2}{1+S_p},$$

где S_p — норма в L_p сингулярного оператора

$$S_\mu = \frac{1}{\pi i}\int_\Gamma \frac{\mu(\tau)}{\tau - z}\,d\tau.$$

Тогда при $\varkappa \geqslant 0$ и $2\varkappa > \nu_p$ однородная задача имеет $2\varkappa - \nu_p$ линейно-независимых решений в классе H_{pqr}. Неоднородная задача имеет единственное решение при выполнении ν_p условий разрешимости. При $\varkappa < 0$ однородная задача не имеет решений, отличных от нулевого, а для разрешимости неоднородной необходимо и достаточно выполнение $2|\varkappa| + \nu_p$ условий разрешимости.

§ 3. Пусть теперь $|a(t)| = |b(t)|$ (параболический случай). Условие параболичности накладывает ограничения на коэффициенты $a(t)$ и $b(t)$. Они могут иметь особенности в одних и тех же точках и одного и того же порядка. Поэтому в выражении их (1) нужно положить $\mu_i = \nu_i$, $\omega_j = \pi_j$, $\delta = \alpha$ и $n = \beta$. Функции $\dfrac{a(t)}{b(t)}$ и $c(t)$ должны быть дифференцируемы в точках a_i, b_j. Решение ищем среди ограниченных функций.

Возьмем комплексное сопряжение от (A)

$$\overline{\varphi^+(t)} = \overline{b(t)}\,\varphi^-(t) + \overline{a(t)}\,\overline{\varphi^-(t)} + \overline{c(t)} \qquad (\overline{\text{A}})$$

и исключим из (A) и $(\overline{\text{A}})$ $\varphi^-(t)$ и $\overline{\varphi^-(t)}$. Это дает

$$\varphi^+(t) = \frac{a(t)}{\overline{b(t)}}\,\overline{\varphi^+(t)} + c(t) - \overline{c(t)}\,\frac{a(t)}{\overline{b(t)}}. \qquad (\text{B}_1)$$

Коэффициент $\dfrac{a(t)}{\overline{b(t)}}$ не имеет никаких особенностей и удовлетворяет условию Гельдера. Свободный член тоже удовлетворяет условию Гельдера. К задаче (B_1) применима лемма [3].

Пусть $\lambda = \operatorname{Ind}\dfrac{a(t)}{\overline{b(t)}}$; l_1 — число решений однородной задачи, линейно-независимых над полем вещественных чисел; p_1 — число вещественных условий разрешимости неоднородной. Тогда при $\lambda \geqslant 0$ $l_1 = \lambda + 1$, $p_1 = 0$, при $\lambda < 0$ $l_2 = 0$, $p_2 = |\lambda| - 1$. Теперь из (B_1) найдем $\varphi^+(t)$ и подставим в (A). Получим внешнюю задачу

$$\overline{\varphi^-(t)} = -\frac{a(t)}{b(t)}\,\varphi^-(t) + \frac{\varphi^+(t) - c(t)}{b(t)}. \qquad (\text{B}_2)$$

Для применения леммы необходимо потребовать, чтобы свободный член удовлетворял условию Гельдера. Функция $\varphi^+(t) - c(t)$ в точках $a_1, \ldots, a_\alpha$ должна обращаться в нуль порядков $\nu_1, \ldots, \nu_\alpha$. Это дает $\nu = \sum_{i=1}^{\alpha} \nu_i$ условий разрешимости. Применяем лемму.

Пусть $s = \operatorname{Ind}\dfrac{a(t)}{b(t)}$. При $s \geqslant 0$ $l_2 = s + 1$, $p_2 = 0$, при $s < 0$ $l_2 = 0$, $p_2 = |\mu| - 1$.

Имеет место

Теорема 2. *Пусть в задаче (A) $|a(t)| = |b(t)|$, $a(t)$, $b(t)$, $c(t)$ имеют вид, указанный выше,*

$$\lambda = \operatorname{Ind}\frac{a(t)}{\overline{b(t)}}, \quad s = \operatorname{Ind}\frac{a(t)}{b(t)}.$$

Обозначим: $\lambda + s = 2\varkappa$, l — *число решений однородной задачи и* p — *число условий разрешимости неоднородной,*

$$\nu = \sum_{i=1}^{\alpha} \nu_i.$$

Рассматриваются решения, ограниченные на бесконечности. Тогда картина разрешимости имеет следующий вид:

1) *если* $\lambda < 0$, $s < 0$, *то* $l = 0$, $p = 2|\varkappa| + \nu - 2$;

2) *если* $\lambda < 0$, $s \geqslant 0$, *то* $l = \max\{0, s - \nu + 1\}$, $p = |\lambda| + \nu - 1$;

3) *если* $\lambda \geqslant 0$, $s \geqslant 0$, *то* $l = \max\{0, 2\varkappa - \nu + 2\}$, $p = \nu$;

4) *если* $\lambda \geqslant 0$, $s < 0$, *то разрешимость задачи зависит от числа решений системы*

$$\sum_{j=1}^{\lambda+1} A_{kj}\alpha_j = f_k, \ k = 1, 2, \ldots, |s| + \nu - 1.$$

Если ранг системы $r = |s| + \nu - 1$, то однородная задача имеет $l = \lambda - \nu - |s| + 2$ решений. Если $r < |s| + \nu - 1$, то однородная задача имеет $l = \lambda - r + 1$ решений. Если $\lambda + 1 < |s| + \nu - 1$, то неизвестных меньше, чем уравнений. Неоднородная система, вообще говоря, несовместна, и однородная имеет только нулевое решение. Для совместности системы необходима и достаточна ортогональность $\{f_k\}$ к решениям транспонированной системы. Если $r < \lambda + 1$, то $p = |s| + \nu - r - 1$, при этом однородная система будет иметь $\lambda - r + 1$ нетривиальных решений.

Литература

1. Гахов Ф. Д. Изв. Казанск. физ.-мат. о-ва, **14**, сер. 3, 1949.
2. Гахов Ф. Д. Краевые задачи. Физматгиз, 1963.
3. Михайлов Л. Г. Тр. АН ТаджССР, отд. физ. и мат., **1**, 1963.
4. Мусхелишвили Н. И. Сингулярные интегральные уравнения. Физматгиз, 1962.
5. Чикин Л. А. Уч. зап. Казанск. ун-та, **113**, № 10, 1953.
6. Юханонов Н. Канд. дисс. Душанбе, 1967.

Белорусский государственный университет им. В. И. Ленина

Поступило в редакцию 24.I 1969