ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2007, том 43, № 8, с. 1029–1042

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

УДК 517.911.5+519.216.2

СУЩЕСТВОВАНИЕ СЛАБЫХ РЕШЕНИЙ СТОХАСТИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С РАЗРЫВНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ И С ЧАСТИЧНО ВЫРОЖДЕННЫМ ОПЕРАТОРОМ ДИФФУЗИИ

© 2007 г. **А. А. Леваков, М. М. Васьковский**

Мы изучаем существование слабых решений стохастических дифференциальных уравнений

$$dX(t) = f(t, X(t))\,dt + g(t, X(t))\,dW(t), \quad X \in R^d, \tag{1}$$

с измеримыми по Борелю функциями $f:\ R_+ \times R^d \to R^d$, $g:\ R_+ \times R^d \to R^{d\times d}$; $W(t)$ – d-мерное броуновское движение.

Цель этой работы – ослабление условий по отношению к известным результатам на функции f, g, обеспечивающих существование слабых решений уравнения (1).

Первая теорема существования слабых решений получена А.В. Скороходом [1] при предположениях, что функции f, g непрерывны и ограничены. Далее, Н.В. Крылов [2] показал, что для существования слабых решений достаточно измеримости, ограниченности функций f, g и невырожденности матрицы g $(\lambda^{\tau} g g^{\tau} \lambda \geq \nu \|\lambda\|^2,\ \nu > 0,\ \forall \lambda \in R^d)$. Затем условие невырожденности матрицы g было ослаблено. А.Ю. Веретенников [3] установил, что для системы

$$dx(t) = f^{(1)}(t, x(t), y(t))\,dt + g^{(1)}(t, x(t), y(t))\,dW(t), \tag{2}$$

$$dy(t) = f^{(2)}(t, x(t), y(t))\,dt + g^{(2)}(t, x(t), y(t))\,dW(t), \quad x \in R^l, \quad y \in R^{d-l},$$

слабые решения существуют при следующих предположениях: функции $f^{(1)}$, $f^{(2)}$, $g^{(1)}$, $g^{(2)}$ измеримы по Борелю, ограничены и непрерывны по y, матрица $g^{(1)}$ не вырождена. Аналогичная теорема установлена в работе [4]. В работе [5] показано, что для существования слабых решений уравнения (1) достаточно, чтобы функции f, g являлись измеримыми, имели линейный порядок роста при $\|X\| \to \infty$ и замыкание пересечения множества слабой вырожденности отображения g, т.е. множества $\{(t, X)|\ \int_{U(t,X)} (\det g g^{\tau}(\tau, y))^{-1}\, d\tau\, dy = \infty$ для каждой открытой окрестности $U(t, X)$ точки $(t, X)\}$, и множества точек разрыва функции f или g содержалось во множестве нулей отображений f и g.

В настоящей работе доказана теорема существования слабых решений уравнения (1), которую в применении к системе (2) можно сформулировать так: если функции $f^{(1)}$, $f^{(2)}$, $g^{(1)}$, $g^{(2)}$ измеримы по Борелю, локально ограничены и непрерывны по y, множество $H \times R^{d-l}$ содержится во множестве точек непрерывности функций f, gg^{τ}, где $H = \{(t, x) \in R_+ \times R^l|$ для каждой открытой окрестности $U(t, x)$ точки (t, x) существует $a > 0$ такое, что интеграл $\int_{U(t,x)} \sup\limits_{y \in R^{d-l},\ \|y\| \leq a} (\det g^{(1)} g^{(1)\tau}(t, x, y))^{-1}\, dt\, dx$ либо не определен, либо равен $\infty\}$, то существует слабое решение системы (2).

Будем использовать следующие обозначения: $a \wedge b$ – меньшее из чисел a, b; $a \vee b$ – большее из чисел a, b; P^x – распределение вероятностей случайной величины x, равенство $P^x = P^y$ означает, что распределения случайных величин x, y совпадают; $E(x)$ – математическое ожидание случайной величины x; f^i – компонента с индексом i векторной функции f; g^{ij} – компонента с индексами i, j матричной функции g; 1_A – характеристическая функция множества A; $\|X\| = \|(x_1, \ldots, x_d)\| = (x_1^2 + \ldots + x_d^2)^{1/2}$; п.н. – почти наверное; C, C_1, C_2, … – универсальные постоянные; $B(0, r) = \{x \in R^d|\ \|x\| \leq r\}$.

Определение. Если существует процесс $X(t)$, заданный на некотором вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ с потоком σ-алгебр $\mathcal{F}_t$, такой, что

1) существует $(\mathcal{F}_t)$-момент остановки e такой, что процесс $X(t)1_{[0,e)}(t)$ $(\mathcal{F}_t)$-согласован, имеет непрерывные траектории при $t < e$ п.н. и $\limsup\limits_{t\uparrow e} \|X(t)\| = \infty$, если $e < \infty$;

2) существует $(\mathcal{F}_t)$-броуновское движение $W(t)$, $W(0) = 0$ п.н.;

3) процессы $f(t, X(t))$, $g(t, X(t))$ принадлежат соответственно пространствам L_1^{loc}, L_2^{loc}, где L_i^{loc} – множество всех измеримых $(\mathcal{F}_t)$-согласованных процессов ψ таких, что для каждого $t \geq 0$ выполняется условие $\int_0^t \|\psi(s,\omega)\|^i \, ds < \infty$ п.н., $i \in \{1, 2\}$;

4) с вероятностью 1 для всех $t \in [0, e)$ имеет место равенство

$$X(t) = X(0) + \int\limits_0^t f(\tau, X(\tau))\, d\tau + \int\limits_0^t g(\tau, X(\tau))\, dW(\tau),$$

то набор $(\Omega, \mathcal{F}, P, \mathcal{F}_t, W(t), X(t), e)$ (или короче $X(t)$) называют слабым решением уравнения (1).

Матрица $\sigma(t, X) = g(t, X)g^{\tau}(t, X)$ является симметрической неотрицательной. Существуют измеримые по Борелю ортогональная T и диагональная $\Lambda = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_d)$ матрицы такие, что $\sigma = T\Lambda T^{\tau}$. Пусть $g^* = T \operatorname{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \ldots, \sqrt{\lambda_d})$. Без ограничения общности будем считать, что в системе (1) $g = g^*$ [6, с. 97–98].

Выберем строки матрицы g с номерами $\beta_1, \ldots, \beta_l$. Пусть

$$\sigma_{\beta_1,\ldots,\beta_l}(t, x_1, \ldots, x_d) = \operatorname{col}(g_{\beta_1}, \ldots, g_{\beta_l})(g_{\beta_1}^{\tau}, \ldots, g_{\beta_l}^{\tau}),$$

g_{β_j} – строка с номером β_j матрицы g, $D_2(0, a) = \{(x_{\beta_{l+1}}, \ldots, x_{\beta_d}) |\ (x_{\beta_{l+1}}^2 + \ldots + x_{\beta_d}^2)^{1/2} \leq a\}$. Построим множество $H(\beta_1, \ldots, \beta_l) = \{(t, x_{\beta_1}, \ldots, x_{\beta_l}) |$ для любой открытой окрестности*) $U(t, x_{\beta_1}, \ldots, x_{\beta_l})$ точки $(t, x_{\beta_1}, \ldots, x_{\beta_l})$ существует $a > 0$ такое, что интеграл

$$\int\limits_{U(t, x_{\beta_1}, \ldots, x_{\beta_l})} \sup_{(x_{\beta_{l+1}}, \ldots, x_{\beta_d}) \in D_2(0,a)} (\det \sigma_{\beta_1,\ldots,\beta_l}(t, x_1, \ldots, x_d))^{-1} \, dt\, dx_{\beta_1} \ldots dx_{\beta_l}$$

либо не определен, либо равен $\infty\}$.

Будем говорить, что вещественная функция $h(t, X) = h(t, x_1, \ldots, x_d)$ удовлетворяет **условию A)**, если существуют строки $g_{\beta_1}, \ldots, g_{\beta_l}$ матрицы g такие, что функция h при каждых фиксированных $(t, x_{\beta_1}, \ldots, x_{\beta_l})$ непрерывна по оставшимся компонентам $(x_{\beta_{l+1}}, \ldots, x_{\beta_d})$ вектора X и множество $\{(t, x_1, \ldots, x_d) |\ (t, x_{\beta_1}, \ldots, x_{\beta_l}) \in H(\beta_1, \ldots, \beta_l)\}$ содержится во множестве точек непрерывности отображения h.

Функция $h: R_+ \times R^d \to R^{d \times r}$ называется **локально ограниченной,** если для любого $b > 0$ существует постоянная $N(b)$ такая, что $\|h(t, X)\| \leq N(b)$ для всех $t \in [0, b]$, $X \in B(0, b)$.

Пусть $g^{(1)}$ – $l \times d$-матрица, составленная из первых l строк матрицы g, $g^{(2)}$ – $(d-l) \times d$-матрица, составленная из оставшихся строк матрицы g, $f^{(1)}$ – вектор, состоящий из первых l компонент вектора f, $f^{(2)}$ – вектор, составленный из оставшихся компонент вектора f, $X = (x, y)$, $x \in R^l$, $y \in R^{d-l}$, $\sigma^{(1)} = g^{(1)}g^{(1)\tau}$, $B_1(0, a) = \{x \in R^l |\ \|x\| \leq a\}$, $B_2(0, a) = \{y \in R^{d-l} |\ \|y\| \leq a\}$, $H = \{(t, x) \in R_+ \times R^l |$ для любой открытой в $R_+ \times R^l$ окрестности $U(t, x)$ точки (t, x) существует такое число $a > 0$, что интеграл

$$\int\limits_{U(t,x)} \sup_{y \in B_2(0,a)} (\det \sigma^{(1)}(\tau, z, y))^{-1} \, d\tau\, dz$$

*) Под открытой окрестностью понимаем окрестность, открытую в пространстве переменных $(t, x_{\beta_1}, \ldots, x_{\beta_l})$.

либо не определен, либо равен $\infty\}$,

$$H^c = (R_+ \times R^l) \setminus H, \quad (H)_\gamma = \{(t,x) \in R_+ \times R^l | \sup_{(s,y)\in H} (|t-s| + \|x-y\|) < \gamma\},$$

$$(H)^c_\gamma = (R_+ \times R^l) \setminus (H)_\gamma.$$

Теперь будем рассматривать систему вида (2) с построенными выше функциями $f^{(1)}$, $f^{(2)}$, $g^{(1)}$, $g^{(2)}$.

Лемма 1. *Пусть* $(\Omega,\ \mathcal{F},\ P,\ \mathcal{F}_t,\ W(t),\ x(t),\ y(t),\ t\in R_+)$ *– слабое решение системы (2), функции* $f^{(1)}$, $f^{(2)}$, $g^{(1)}$, $g^{(2)}$ *измеримы по Борелю и локально ограничены. Тогда для любых* $a>0$, $T>0$ *существует постоянная* $c(a,T,l,d)$ *такая, что для любой неотрицательной измеримой по Борелю функции* $\psi(t,x,y)$, *такой, что для любого числа* $b>0$ *отображение* $(t,x) \to \sup\limits_{y\in B_2(0,b)} \psi(t,x,y)$ *измеримо по Лебегу, имеем*

$$E\Bigg(\int\limits_0^{T\wedge\tau^a} (\det\sigma^{(1)}(t,x(t),y(t)))^{1/(l+1)}\psi(t,x(t),y(t))\,dt\Bigg) \le$$

$$\le c(a,T,l,d)\Bigg(\int\limits_{[0,T]\times B_1(0,a)} \sup_{y\in B_2(0,a)} \psi^{l+1}(t,x,y)\,dt\,dx\Bigg)^{1/(l+1)}, \qquad (3)$$

где $\tau^a = \inf\{t | \|x(t)\| \vee \|y(t)\| > a\}$.

Доказательство. Возьмем произвольные $T>0$, $a>0$. Пусть функция $q: R_+\times R^l \to R_+$ непрерывна и ограничена. Положим $q(t,x)=0$ для $t<0$. По лемме Крылова (лемма II.2.7 [2]) существует ограниченная функция $z(t,x)\le 0$, равная нулю при $t<0$ и такая, что для всех достаточно больших n и для всех $(t,x)\in R_+\times B_1(0,a)$ выполняются следующие условия:

1) $c_1(a,l)(\det\sigma^{(1)}(T-t,x,y))^{1/(l+1)}q_n(t,x) \le -\dfrac{\partial z_n(t,x)}{\partial t} + \dfrac{1}{2}\sum\limits_{i,j=1}^{l} \sigma^{(1)ij}(T-t,x,y)\dfrac{\partial^2 z_n(t,x)}{\partial x^i \partial x^j}$,

где $c_1(a,l)$ – положительная постоянная, $\sigma^{(1)ij}$ – компоненты матрицы $\sigma^{(1)}$,

$$\sigma^{(1)ij}(T-t,x,y) = 0 \quad \text{при} \quad t > T,$$

$z_n(t,x)$ – свертка функций $z(t,x)$, $J_n(t,x)$, т.е.

$$z_n(t,x) = z(t,x) * J_n(t,x) = \int\limits_{|t-\tau|\le 1/n,\ \|x-\eta\|\le 1/n} z(\tau,\eta)J_n(t-\tau,x-\eta)\,d\tau\,d\eta,$$

$$q_n(t,x) = q(t,x) * J_n(t,x), \quad J_n(t,x) = n^{l+1}\zeta(nt,nx),$$

$\zeta(t,x)$ – неотрицательная бесконечно дифференцируемая функция, равная нулю при $\|x\|>1$, $|t|>1$, для которой $\int_{|t|\le 1} dt \int_{\|x\|\le 1} \zeta(t,x)\,dx = 1$;

2) если $b\in R^l$, $c>0$ таковы, что $\|b\| \le ac/2$, то

$$-\sum_{i=1}^{l} \frac{\partial z_n(t,x)}{\partial x^i} b_i \le c|z_n(t,x)|$$

для всех $(t,x)\in R_+\times B_1(0,a)$;

3) существует постоянная $c_2(a,l)$ такая, что

$$|z(t,x)| \le c_2(a,l)\Bigg(\int\limits_{[0,t]\times B_1(0,a)} q^{l+1}(s,x)\,ds\,dx\Bigg)^{1/(l+1)}$$

для всех $(t,x)\in R_+\times R^l$.

Обозначим

$$I(q_n) = \int\limits_0^{T\wedge\tau^a} (\det\sigma^{(1)}(t,x(t),y(t)))^{1/(l+1)} q_n(T-t,x(t))\,dt.$$

Используя формулу Ито и соотношения 1)–3), имеем

$$E(I(q_n)) \le \frac{1}{c_1}E\bigg(\int\limits_0^{T\wedge\tau^a}\bigg(-\frac{\partial z_n(T-t,x(t))}{\partial t} + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{l}\sigma^{(1)ij}(t,x(t),y(t))\frac{\partial^2 z_n(T-t,x(t))}{\partial x^i\partial x^j}\bigg)dt\bigg) =$$

$$= \frac{1}{c_1}E\bigg(z_n(T-(T\wedge\tau^a), x(T\wedge\tau^a)) - z_n(T,x(0)) -$$

$$-\int\limits_0^{T\wedge\tau^a}\sum_{i=1}^{l}\sum_{j=1}^{d}\frac{\partial z_n(T-t,x(t))}{\partial x^i}g^{(1)ij}(t,x(t),y(t))dW^j(t) -$$

$$-\int\limits_0^{T\wedge\tau^a}\sum_{i=1}^{l}\frac{\partial z_n(T-t,x(t))}{\partial x^i}f^{(1)i}(t,x(t),y(t))\,dt\bigg) \le$$

$$\le c_3(a,T,l,d)\sup_{0\le t\le T,\ x\in B_1(0,a)}|z_n(t,x)| \le c_3(a,T,l,d)\sup_{0\le t\le T,\ x\in B_1(0,a)}|z(t,x)| \le$$

$$\le c_4(a,T,l,d)\bigg(\int\limits_{[0,T]\times B_1(0,a)} q^{l+1}(t,x)\,dt\,dx\bigg)^{1/(l+1)} \qquad (4)$$

Пусть $q_n(T-t,x) = r_n(t,x)$, $q(T-t,x) = r(t,x)$, применяя неравенство (4) и лемму Фату, получаем соотношения

$$c_4\bigg(\int\limits_{[0,T]\times B_1(0,a)} r^{l+1}(t,x)\,dt\,dx\bigg)^{1/(l+1)} = c_4\bigg(\int\limits_{[0,T]\times B_1(0,a)} q^{l+1}(t,x)\,dt\,dx\bigg)^{1/(l+1)} \ge$$

$$\ge E\bigg(\int\limits_0^{T\wedge\tau^a}(\det\sigma^{(1)}(t,x(t),y(t)))^{1/(l+1)}\liminf_{n\to\infty} q_n(T-t,x(t))\,dt\bigg) \ge$$

$$\ge E\bigg(\int\limits_0^{T\wedge\tau^a}(\det\sigma^{(1)}(t,x(t),y(t)))^{1/(l+1)} q(T-t,x(t))\,dt\bigg) =$$

$$= E\bigg(\int\limits_0^{T\wedge\tau^a}(\det\sigma^{(1)}(t,x(t),y(t)))^{1/(l+1)} r(t,x(t))\,dt\bigg). \qquad (5)$$

Последнее соотношение выполняется для всех неотрицательных непрерывных ограниченных функций $r(t,x)$. Используя теорему I.20 [7], заключаем, что неравенство (5) верно и для неотрицательных измеримых по Лебегу ограниченных функций $r(t,x)$. Приближая функцию $r(t,x)$ последовательностью функций $r\wedge n$, $n\ge 1$, получаем неравенство (5) для измеримой по Лебегу неотрицательной функции $r(t,x)$.

Пусть $\psi(t,x,y)$ – произвольная функция, удовлетворяющая условиям леммы 1, тогда, применяя уже доказанное утверждение к функции $r(t,x) = \sup_{y\in B_2(0,a)} \psi(t,x,y)$, получаем

$$E\left(\int\limits_0^{T\wedge\tau^a} (\det\sigma^{(1)}(t,x(t),y(t)))^{1/(l+1)}\psi(t,x(t),y(t))\,dt\right) \le$$

$$\le E\left(\int\limits_0^{T\wedge\tau^a} (\det\sigma^{(1)}(t,x(t),y(t)))^{1/(l+1)} \sup_{y\in B_2(0,a)} \psi(t,x(t),y)\,dt\right) \le$$

$$\le c(a,T,l,d)\left(\int\limits_{[0,T]\times B_1(0,a)} \sup_{y\in B_2(0,a)} \psi^{l+1}(t,x,y)\,dt\,dx\right)^{1/(l+1)}$$

Лемма доказана.

Следствие 1. *Пусть выполнены условия леммы 1 и функция $\psi(t,x,y)$ неотрицательная измеримая по Борелю непрерывная по y при каждых фиксированных $(t,x)\in R_+\times R^l$. Тогда для любых $T\in R_+$, $a\in R_+$ существует постоянная $c(a,T,l,d)$ такая, что для любого $\epsilon>0$ справедливо неравенство*

$$E\left(\int\limits_0^{T\wedge\tau^a} 1_{(H)^c_\epsilon}(t,x(t))\psi(t,x(t),y(t))\,dt\right) \le$$

$$\le c(a,T,l,d)\left(\int\limits_{([0,T]\times B_1(0,a))\cap(H)^c_\epsilon} \sup_{y\in B_2(0,a)} (\det\sigma^{(1)}(t,x,y))^{-1} \sup_{y\in B_2(0,a)} \psi^{l+1}(t,x,y)\,dt\,dx\right)^{1/(l+1)},$$

где $\tau^a = \inf\{t|\ \|x(t)\|\vee\|y(t)\|>a\}$.

Действительно, так как интегрируемость, а следовательно, и измеримость по Лебегу функции $(t,x)\to 1_{(H)^c_\epsilon}(t,x)\sup_{y\in B_2(0,a)}(\det\sigma^{(1)}(t,x,y))^{-1/(l+1)}$, $(t,x)\in[0,T]\times B_1(0,a)$ вытекает из определения множества H, то для доказательства следствия 1 достаточно применить лемму 1 к функции $\psi_1(t,x,y) = 1_{(H)^c_\epsilon}(t,x)(\det\sigma^{(1)}(t,x,y))^{-1/(l+1)} \sup_{y\in B_2(0,a)}\psi(t,x,y)$ (считаем, что $\psi_1(t,x,y)=0$, если $1_{(H)^c_\epsilon}(t,x)=0$).

Построим матрицы $\sigma_n = T\Lambda_n T^{\mathrm{T}}$, где

$$\Lambda_n = \mathrm{diag}((\lambda_1+1/n)\wedge n,\ldots,(\lambda_d+1/n)\wedge n),$$

$$g_n = T\,\mathrm{diag}(((\lambda_1+1/n)\wedge n)^{1/2},\ldots,((\lambda_d+1/n)\wedge n)^{1/2}),$$

$$f_n(t,X) = (f_n^i(t,X)),\quad f_n^i(t,X) = (f^i(t,X)\vee(-n))\wedge n,\quad i=1,\ldots,d,\quad n\in N.$$

Матрицы g_n, f_n разобьем на подматрицы $g_n^{(1)}$, $g_n^{(2)}$, $f_n^{(1)}$, $f_n^{(2)}$ так же, как матрицы g, f были разбиты на подматрицы $g^{(1)}$, $g^{(2)}$, $f^{(1)}$, $f^{(2)}$. Для каждого натурального n существует постоянная $\alpha_n>0$ такая, что $\det g_n g_n^{\mathrm{T}} = \det\sigma_n \ge \alpha_n$ для всех $(t,X)\in R_+\times R^d$, кроме того, $\lim_{n\to\infty} f_n(t,X) = f(t,X)$, $\lim_{n\to\infty}\sigma_n(t,X) = \sigma(t,X)$ в каждой точке $(t,X)\in R_+\times R^d$.

Следствие 2. *Пусть $a\in R_+$, $T\in R_+$, функции f, g измеримы по Борелю и локально ограничены, $X_n(t) = (x_n(t),y_n(t))$ – последовательность слабых решений систем*

$$dx(t) = f_n^{(1)}(t,x(t),y(t))dt + g_n^{(1)}(t,x(t),y(t))dW(t),$$

$$dy(t) = f_n^{(2)}(t,x(t),y(t))dt + g_n^{(2)}(t,x(t),y(t))dW(t),$$

$(\hat{X}_n(t))$, $n \geq 1$, *– последовательность непрерывных процессов таких, что* $P^{(\hat{X}_n,\hat{\tau}_n^a)} = P^{(X_n,\tau_n^a)}$, $\hat{X}_n(s) \underset{n\to\infty}{\to} \hat{X}(s) = (\hat{x}(s), \hat{y}(s))$ *равномерно на каждом отрезке из* R_+ *п.н.,* $\hat{\tau}_n^a \underset{n\to\infty}{\to} \hat{\tau}^a$ *п.н., где* $\hat{\tau}_n^a$, $\hat{\tau}^a$, τ_n^a *– моменты остановки такие, что*

$$\|x_n(t)\| \vee \|y_n(t)\| \leq a \quad \forall t \leq \tau_n^a, \quad \|\hat{x}_n(t)\| \vee \|\hat{y}_n(t)\| \leq a \quad \forall t \leq \hat{\tau}_n^a, \quad \|\hat{x}(t)\| \vee \|\hat{y}(t)\| \leq a \quad \forall t \leq \hat{\tau}^a.$$

Тогда для любого $\epsilon > 0$ *и любой неотрицательной измеримой по Борелю непрерывной по* y *функции* $\psi(t,x,y)$ *выполняется неравенство*

$$E\biggl(\int\limits_0^{T\wedge\hat{\tau}^a} 1_{(H)_\epsilon^c}(t,\hat{x}(t))\psi(t,\hat{x}(t),\hat{y}(t))dt\biggr) \leq \tag{6}$$

$$\leq c(a,T,l,d)\biggl(\int\limits_{([0,T]\times B_1(0,a))\cap(H)_{\epsilon/2}^c} \sup_{y\in B_2(0,a)} (\det\sigma^{(1)}(t,x,y))^{-1} \sup_{y\in B_2(0,a)} \psi^{l+1}(t,x,y)\,dt\,dx\biggr)^{1/(l+1)},$$

где постоянная $c(a,T,l,d)$ *такая же, как в лемме 1.*

Доказательство. Пусть $\epsilon > 0$. По следствию 1 для любой неотрицательной непрерывной ограниченной функции $r(t,x)$ имеет место неравенство

$$E\biggl(\int\limits_0^{T\wedge\tau_n^a} 1_{(H)_{\epsilon/2}^c}(t,x_n(t))r(t,x_n(t))\,dt\biggr) \leq$$

$$\leq c(a,T,l,d)\biggl(\int\limits_{([0,T]\times B_1(0,a))\cap(H)_{\epsilon/2}^c} (\sup_{y\in B_2(0,a)} (\det\sigma_n^{(1)}(t,x,y))^{-1})r^{l+1}(t,x)\,dt\,dx\biggr)^{1/(l+1)}. \tag{7}$$

Применяя неравенство (7), лемму Фату, неравенство $1_{(H)_{\epsilon/2}^c}(t,\hat{x}_n(t)) \geq 1_{(H)_\epsilon^c}(t,\hat{x}(t))$, которое выполняется для всех n, начиная с некоторого номера, и всех $t \in [0,T]$, неравенство $\det\sigma_n^{(1)}(t,x,y) \geq \det\sigma^{(1)}(t,x,y)$, справедливое для всех $(t,x,y) \in [0,T]\times B_1(0,a)\times B_2(0,a)$ при всех достаточно больших n, имеем

$$c(a,T,l,d)\biggl(\int\limits_{([0,T]\times B_1(0,a))\cap(H)_{\epsilon/2}^c} (\sup_{y\in B_2(0,a)} (\det\sigma^{(1)}(t,x,y))^{-1})r^{l+1}(t,x)\,dt\,dx\biggr)^{1/(l+1)} \geq$$

$$\geq \liminf_{n\to\infty} c(a,T,l,d)\biggl(\int\limits_{([0,T]\times B_1(0,a))\cap(H)_{\epsilon/2}^c} (\sup_{y\in B_2(0,a)} (\det\sigma_n^{(1)}(t,x,y))^{-1})r^{l+1}(t,x)\,dt\,dx\biggr)^{1/(l+1)} \geq$$

$$\geq \liminf_{n\to\infty} E\biggl(\int\limits_0^{T\wedge\tau_n^a} 1_{(H)_{\epsilon/2}^c}(t,x_n(t))r(t,x_n(t))\,dt\biggr) = \liminf_{n\to\infty} E\biggl(\int\limits_0^{T\wedge\hat{\tau}_n^a} 1_{(H)_{\epsilon/2}^c}(t,\hat{x}_n(t))r(t,\hat{x}_n(t))\,dt\biggr) \geq$$

$$\geq \liminf_{n\to\infty} E\biggl(\int\limits_0^{T\wedge\hat{\tau}^a} 1_{(H)_\epsilon^c}(t,\hat{x}(t))r(t,\hat{x}_n(t))\,dt\biggr) \geq E\biggl(\int\limits_0^{T\wedge\hat{\tau}^a} 1_{(H)_\epsilon^c}(t,\hat{x}(t))\liminf_{n\to\infty} r(t,\hat{x}_n(t))\,dt\biggr) =$$

$$= E\biggl(\int\limits_0^{T\wedge\hat{\tau}^a} 1_{(H)_\epsilon^c}(t,\hat{x}(t))r(t,\hat{x}(t))\,dt\biggr).$$

Из теоремы о монотонных классах следует, что последнее неравенство верно для произвольных измеримых по Лебегу неотрицательных функций $r(t,x)$. Применяя это неравенство к функции $r(t,x) = \sup\limits_{y\in B_2(0,a)} \psi(t,x,y)$, так же, как и при доказательстве леммы 1, получаем требуемое неравенство (6).

Лемма 2. *Пусть $f(t,x,y)$ – вещественная измеримая по Борелю непрерывная по y локально ограниченная функция, $f_n(t,x,y) = f(t,x,y) * J_n(t,x)$, $n \geq 1$. Тогда для любых $a \in R_+$, $T \in R_+$, $\gamma > 0$ имеет место сходимость*

$$\int\limits_{([0,T]\times B_1(0,a))\cap(H)^c_\gamma} \sup_{y\in B_2(0,a)} (\det\sigma^{(1)}(t,x,y))^{-1} \sup_{y\in B_2(0,a)} |f_n(t,x,y) - f(t,x,y)|^{l+1}\,dt\,dx \underset{n\to\infty}{\to} 0.$$

Доказательство. Возьмем $\epsilon > 0$, $a \in R_+$, $T \in R_+$. Пусть $\hat{D} = ([0,T] \times B_1(0,a)) \cap (H)^c_\gamma$, $D_1 = ([-1,T+1] \times B_1(0,a+1)) \cap (H)^c_\gamma$, тогда $\int_{D_1} \sup\limits_{y\in B_2(0,a)} (\det\sigma^{(1)}(t,x,y))^{-1}\,dt\,dx < \infty$. Существует $\delta(\epsilon) > 0$ такое, что для любого множества $E \subset D_1$, $\mu(E) \leq \delta(\epsilon)$ (μ – мера Лебега), выполняется неравенство

$$\int\limits_E \sup_{y\in B_2(0,a)} (\det\sigma^{(1)}(t,x,y))^{-1}\,dt\,dx \leq \epsilon. \tag{8}$$

По теореме Скорца–Драгони [8] существует замкнутое множество

$$K(a,T,\delta(\epsilon)) \subset [-1,T+1] \times B_1(0,a+1)$$

такое, что сужение функции f на $K \times B_2(0,a+1)$ непрерывно и

$$\mu(([-1,T+1] \times B_1(0,a+1)) \setminus K) \leq \delta(\epsilon).$$

По теореме Кантора найдется $\nu(\epsilon,a,T)$ такое, что для любых

$$(t_1,x_1,y_1),(t_2,x_2,y_2) \in K \times B_2(0,a+1), \quad |t_2 - t_1| \leq \nu(\epsilon,a,T),$$
$$\|x_2 - x_1\| \leq \nu(\epsilon,a,T), \quad \|y_2 - y_1\| \leq \nu(\epsilon,a,T),$$

выполняется неравенство $|f(t_1,x_1,y_1) - f(t_2,x_2,y_2)| \leq \epsilon$. Отсюда для любых

$$(t,x) \in K \cap ([0,T] \times B_1(0,a)),$$

любых τ, $|\tau| \leq 1$, любых z, $\|z\| \leq 1$, справедливо неравенство

$$\sup_{y_1,y_2\in B_2(0,a),\ \|y_1-y_2\|\leq\nu(\epsilon,a,T)} |f(t-\tau,x-z,y_1) - f(t-\tau,x-z,y_2)| \leq \epsilon. \tag{9}$$

Теперь из (8), (9) вытекает, что для всех τ, z, $|\tau| \leq 1$, $\|z\| \leq 1$,

$$\int\limits_{\hat{D}} \sup_{y\in B_2(0,a)} (\det\sigma^{(1)}(t,x,y))^{-1} \sup_{\substack{y_1,y_2\in B_2(0,a)\\ \|y_1-y_2\|\leq\nu(\epsilon,a,T)}} |f(t-\tau,x-z,y_1) - f(t-\tau,x-z,y_2)|^{l+1}\,dt\,dx =$$

$$= \int\limits_{\hat{D}\cap K} \sup_{y\in B_2(0,a)} (\det\sigma^{(1)}(t,x,y))^{-1} \sup_{\substack{y_1,y_2\in B_2(0,a)\\ \|y_1-y_2\|\leq\nu(\epsilon,a,T)}} |f(t-\tau,x-z,y_1) - f(t-\tau,x-z,y_2)|^{l+1}\,dt\,dx +$$

$$+ \int\limits_{\hat{D}\setminus K} \sup_{\substack{y_1,y_2\in B_2(0,a)\\ \|y_1-y_2\|\leq\nu(\epsilon,a,T)}} |f(t-\tau,x-z,y_1) - f(t-\tau,x-z,y_2)|^{l+1} \sup_{y\in B_2(0,a)} (\det\sigma^{(1)}(t,x,y))^{-1}\,dt\,dx \leq C\epsilon^{l+1}. \tag{10}$$

Используя неравенства (9), (10) и обобщенное неравенство Минковского, имеем

$$\left(\int\limits_{\tilde{D}} \sup_{y \in B_2(0,a)} (\det \sigma^{(1)}(t,x,y))^{-1} \sup_{\substack{y_1, y_2 \in B_2(0,a) \\ \|y_1 - y_2\| \le \nu(\epsilon,a,T)}} |f_n(t,x,y_1) - f_n(t,x,y_2)|^{l+1}\, dt\, dx \right)^{1/(l+1)} \le$$

$$\le \left(\int\limits_{\tilde{D}} dt\, dx \left(\int\limits_{\substack{|\tau| \le 1/n \\ \|z\| \le 1/n}} \sup_{y \in B_2(0,a)} (\det \sigma^{(1)}(t,x,y))^{-1/(l+1)} \times \right.\right.$$

$$\left.\left. \times \sup_{\substack{y_1, y_2 \in B_2(0,a) \\ \|y_1 - y_2\| \le \nu(\epsilon,a,T)}} |f(t-\tau, x-z, y_1) - f(t-\tau, x-z, y_2)| J_n(\tau, z)\, d\tau\, dz \right)^{l+1} \right)^{1/(l+1)} \le$$

$$\le \int\limits_{\substack{|\tau| \le 1/n \\ \|z\| \le 1/n}} d\tau\, dz \left(\int\limits_{\tilde{D}} \sup_{y \in B_2(0,a)} (\det \sigma^{(1)}(t,x,y))^{-1} \times \right.$$

$$\left. \times \sup_{\substack{y_1, y_2 \in B_2(0,a) \\ \|y_1 - y_2\| \le \nu(\epsilon,a,T)}} |f(t-\tau, x-z, y_1) - f(t-\tau, x-z, y_2)|^{l+1} J_n^{l+1}(\tau, z)\, dt\, dx \right)^{1/(l+1)} \le$$

$$\le \int\limits_{\substack{|\tau| \le 1/n \\ \|z\| \le 1/n}} C^{1/(l+1)} \epsilon J_n(\tau, z)\, d\tau\, dz \le C_1 \epsilon. \tag{11}$$

Для каждого $y \in B_2(0,a)$ имеет место соотношение

$$\int\limits_{\tilde{D}} \sup_{y \in B_2(0,a)} (\det \sigma^{(1)}(t,x,y))^{-1} |f_n(t,x,y) - f(t,x,y)|^{l+1}\, dt\, dx \underset{n \to \infty}{\to} 0.$$

Пусть $Y = \{y_k\}$ – конечная $\nu(\epsilon, a, T)$-сеть для $B_2(0,a)$. Существует $n_0(\epsilon)$ такое, что для всех $n \ge n_0(\epsilon)$ выполняется неравенство

$$\int\limits_{\tilde{D}} \sup_{y \in B_2(0,a)} (\det \sigma^{(1)}(t,x,y))^{-1} \sup_{y_k \in Y} |f_n(t,x,y_k) - f(t,x,y_k)|^{l+1}\, dt\, dx \le \epsilon^{l+1}. \tag{12}$$

Используя неравенства (10)–(12) для всех $n \ge n_0(\epsilon)$, получаем соотношения

$$\int\limits_{\tilde{D}} \sup_{y \in B_2(0,a)} (\det \sigma^{(1)}(t,x,y))^{-1} \sup_{y \in B_2(0,a)} |f_n(t,x,y) - f(t,x,y)|^{l+1}\, dt\, dx \le$$

$$\le \int\limits_{\tilde{D}} \sup_{y \in B_2(0,a)} (\det \sigma^{(1)}(t,x,y))^{-1} \sup_{\substack{y \in B_2(0,a) \\ y_k \in Y \\ \|y - y_k\| \le \nu(\epsilon,a,T)}} |f_n(t,x,y) - f_n(t,x,y_k)|^{l+1}\, dt\, dx +$$

$$+ \int\limits_{\tilde{D}} \sup_{y \in B_2(0,a)} (\det \sigma^{(1)}(t,x,y))^{-1} \sup_{y_k \in Y} |f_n(t,x,y_k) - f(t,x,y_k)|^{l+1}\, dt\, dx +$$

$$+ \int\limits_{\tilde{D}} \sup_{y \in B_2(0,a)} (\det \sigma^{(1)}(t,x,y))^{-1} \sup_{\substack{y \in B_2(0,a) \\ y_k \in Y \\ \|y - y_k\| \le \nu(\epsilon,a,T)}} |f(t,x,y) - f(t,x,y_k)|^{l+1}\, dt\, dx \le C_2 \epsilon^{l+1}.$$

Лемма 2 доказана.

Теорема. *Пусть функции* $f(t,X)$, $g(t,X)$ *измеримы по Борелю и локально ограничены, компоненты функций* $f(t,X)$, $\sigma(t,X)=g(t,X)g^{\tau}(t,X)$ *удовлетворяют условию A). Тогда для любой заданной вероятности* ν *на* $(R^d,\mathcal{B}(R^d))$ *уравнение (1) имеет слабое решение с начальным распределением* ν.

Доказательство. По теореме Крылова (теорема II.6.1 [2]) для любого $n\in N$ уравнение

$$X_n(t)=X_n(0)+\int\limits_0^t f_n(\tau,X_n(\tau))\,d\tau+\int\limits_0^t g_n(\tau,X_n(\tau))\,dW_n(\tau),\quad t\in R_+, \tag{13}$$

имеет слабое решение $(\Omega_n,\ \mathcal{F}_n,\ P_n,\ \mathcal{F}_{nt},\ W_n(t),\ X_n(t),\ t\in R_+)$ с начальным распределением ν.

Определим $\tau_n^m=\inf\{t|\ \|X_n(t)\|>m\}$, $X_n^m(t)=X_n(t\wedge\tau_n^m)$ и рассмотрим двойную последовательность

$$\begin{pmatrix}(X_1^1,\tau_1^1) & (X_1^2,\tau_1^2) & \dots & (X_1^m,\tau_1^m) & \dots\\ (X_2^1,\tau_2^1) & (X_2^2,\tau_2^2) & \dots & (X_2^m,\tau_2^m) & \dots\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ (X_n^1,\tau_n^1) & (X_n^2,\tau_n^2) & \dots & (X_n^m,\tau_n^m) & \dots\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\end{pmatrix}.$$

Обозначим $\Psi_k=((X_k^1,\tau_k^1),(X_k^2,\tau_k^2),\dots,(X_k^m,\tau_k^m),\dots)$, $k=1,2,\dots$

Введем метрику ρ в $(C([0,+\infty),R^d),[0,+\infty])$ и метрику D в

$$((C([0,+\infty),R^d),[0,+\infty])\times\dots\times(C([0,+\infty),R^d),[0,+\infty])\times\dots)$$

следующим образом:

$$\rho((z,\tau),(z^1,\tau^1))=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}(\sup_{0\le t\le n}\|z(t)-z^1(t)\|\wedge 1)+\left|\frac{\tau}{1+\tau}-\frac{\tau^1}{1+\tau^1}\right|,$$

$$D(((X_n^1,\tau_n^1),\dots,(X_n^m,\tau_n^m),\dots),((X_k^1,\tau_k^1),\dots,(X_k^m,\tau_k^m),\dots))=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{2^{m+1}}\rho((X_n^m,\tau_n^m),(X_k^m,\tau_k^m)).$$

Для любого $T>0$ и любого фиксированного $m\in N$ существуют постоянные $M_1(m)$, $M(m,T)$ такие, что выполняются неравенства

1) $\sup\limits_n E(\|X_n^m(0)\|^2)\le M_1(m)$,

2) $\sup\limits_n E(\|X_n^m(t)-X_n^m(s)\|^4)\le M(m,T)|t-s|^2$ для любых $s,t\in[0,T]$.

Из доказательства теоремы I.4.3 [6] вытекает, что последовательность (X_n^m,τ_n^m), $n\ge 1$, плотна в $(C([0,+\infty),R^d),[0,+\infty])$ при каждом $m\in N$.

Лемма 3. *Последовательность* Ψ_n, $n\ge 1$, *плотна в пространстве*

$$((C([0,+\infty),R^d),[0,+\infty])\times\dots\times(C([0,+\infty),R^d),[0,+\infty])\times\dots).$$

Доказательство. Возьмем произвольное $\epsilon>0$. Для любого натурального m существует компакт $K_m\in(C([0,+\infty),R^d),[0,+\infty])$ такой, что $P^{(X_n^m,\tau_n^m)}(K_m)\ge 1-\epsilon/2^m$ $\forall n\in N$. Пусть $K=K_1\times\dots\times K_m\times\dots$ Докажем, что K – компакт в пространстве

$$((C([0,+\infty),R^d),[0,+\infty])\times\dots\times(C([0,+\infty),R^d),[0,+\infty])\times\dots).$$

Для любого $\delta>0$ возьмем $m=m(\delta)$ такое, что $1/2^m<\delta/2$. Для каждого K_j, $j=1,\dots,m$, существует конечная $(\delta/2)$-сеть $\{s_1^j,\dots,s_{n_j}^j\}$. Для K_j, $j\ge m+1$, выберем произвольный элемент $s^j\in K_j$.

Пусть $S = \{(s^1_{k_1}, \ldots, s^m_{k_m}, s^{m+1}, s^{m+2}, \ldots) |\ k_1 \in \{1, \ldots, n_1\},\ \ldots,\ k_m \in \{1, \ldots, n_m\}\}$. Для любого $\tilde{k} \in K$ существует $\tilde{s} \in S$ такое, что

$$\hat{D}(\tilde{k}, \tilde{s}) \leq \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{2^k} \frac{\delta}{2} + \sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{1}{2^k} < \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} = \delta.$$

Следовательно, S является конечной δ-сетью для K. Множество K, очевидно, замкнуто. Таким образом, K – компакт. Используя плотность последовательности (X^m_n, τ^m_n), $n \geq 1$, в $(C([0, +\infty), R^d), [0, +\infty])$ при каждом $m \in N$, заключаем, что

$$P^{\Psi_n}(K) \geq 1 - \epsilon \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{2^m} = 1 - \epsilon.$$

Утверждение леммы доказано.

Для последовательности Ψ_n, $n \geq 1$, выполнены условия теоремы Скорохода (теорема I.2.7 [6]). Из ее доказательства следует, что можно выбрать подпоследовательность n_k последовательности n (для упрощения обозначений вместо n_k будем писать n) и можно построить процессы $\varepsilon_n = ((z^1_n, \eta^1_n), \ldots, (z^m_n, \eta^m_n), \ldots)$ и $\varepsilon = ((z^1, \eta^1), \ldots, (z^m, \eta^m), \ldots)$ на некотором вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ так, что процессы $z^m_n(t)$, $z^m(t)$ являются непрерывными, $P^{\varepsilon_n} = P^{\Psi_n}$, $z^m_n(t) \underset{n\to\infty}{\to} z^m(t)$ равномерно на каждом компакте из R_+ п.н. и $\eta^m_n \underset{n\to\infty}{\to} \eta^m$ п.н. Кроме того, $z^m(t) = z^{m+1}(t)$ при $t < \eta^m$, $\eta^m \leq \eta^{m+1}$ п.н. Пусть $e = \lim\limits_{m\to\infty} \eta^m$. Определим процесс $z(t)$ следующим образом: $z(t) = z^m(t)$ для $t \leq \eta^m$, $\eta^m < \infty$, $z(t) = z^m(t)$ для $t < \eta^m$, $\eta^m = \infty$, $z(t) = 0$ при $t \geq e$. Обозначим через $\sigma_{t+\epsilon}$ наименьшую σ-алгебру, относительно которой измеримы все случайные векторы $z^m(s)$, $0 \leq s \leq t + \epsilon$, $m \geq 1$. Пусть $\mathcal{F}_t = \bigcap_{\epsilon>0} \sigma_{t+\epsilon}$, тогда процесс $z(t)1_{[0,e)}(t)$ $(\mathcal{F}_t)$-согласован и имеет непрерывные траектории при $t < e$. Кроме того, e является $(\mathcal{F}_t)$-моментом остановки и $\limsup\limits_{t\uparrow e} \|z(t)\| = \infty$ для $e < \infty$.

Зафиксируем $m \in N$ и возьмем произвольно: $s, t \in R_+$, $s \leq t$; дважды непрерывно дифференцируемую функцию $h:\ R^d \to R$, ограниченную вместе с частными производными до второго порядка включительно; непрерывную ограниченную $(\mathcal{B}_s(C(R_+, R^d)))$-измеримую функцию $q:\ C(R_+, R^d) \to R$.

Из соотношения (13) с учетом формулы Ито вытекает равенство

$$E_n\Bigg(\Bigg(h(X^m_n(t)) - h(X^m_n(s)) - \int\limits_{s\wedge\tau^m_n}^{t\wedge\tau^m_n} \Bigg(\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{d} \sigma^{ij}_n(\tau, X^m_n(\tau)) h_{x_i x_j}(X^m_n(\tau)) +$$

$$+ \sum_{i=1}^{d} f^i_n(\tau, X^m_n(\tau)) h_{x_i}(X^m_n(\tau))\Bigg)\, d\tau\Bigg) q(X^m_n)\Bigg) = 0. \tag{14}$$

Зафиксируем компоненту $f^i(t, X)$ вектора f с номером i. Используя условие A), выберем строки с номерами $\beta_1, \ldots, \beta_l$ матрицы g так, что функция $f^i(t, X)$ непрерывна по переменным $\hat{\hat{x}} = (x_{\beta_l+1}, \ldots, x_{\beta_d})$ при каждых фиксированных $(t, \hat{x}) = (t, x_{\beta_1}, \ldots, x_{\beta_l})$ и множество $\{(t, x_1, \ldots, x_d)|\ (t, x_{\beta_1}, \ldots, x_{\beta_l}) \in H(\beta_1, \ldots, \beta_l)\}$ содержится во множестве точек непрерывности функции $f^i(t, X)$ (не нарушая общности, можно считать, что $\beta_1 = 1,\ \ldots,\ \beta_l = l$). Каждый из процессов X_n, X^m_n, z, z^m_n, z^m разделится на два процесса: $X_n = (\hat{X}_n, \hat{\hat{X}}_n)$, $X^m_n = (\hat{X}^m_n, \hat{\hat{X}}^m_n)$, $z = (\hat{z}, \hat{\hat{z}})$, $z^m_n = (\hat{z}^m_n, \hat{\hat{z}}^m_n)$, $z^m = (\hat{z}^m, \hat{\hat{z}}^m)$. Для простоты вместо $H(\beta_1, \ldots, \beta_l)$ запишем H и обозначим $(\sigma_n)_{1,\ldots,l}(t, x_1, \ldots, x_d) = a_n(t, \hat{x}, \hat{\hat{x}})$, $\sigma_{1,\ldots,l}(t, x_1, \ldots, x_d) = a(t, \hat{x}, \hat{\hat{x}})$.

Возьмем последовательность $\epsilon_k \downarrow 0$ при $k \to \infty$. Докажем следующее соотношение:

$$\lim_{n\to\infty} E\Bigg(\Bigg(\int\limits_{s\wedge\eta^m_n}^{t\wedge\eta^m_n} 1_{(H)^c_{\epsilon_k}}(\tau, \hat{z}^m_n(\tau)) f^i_n(\tau, \hat{z}^m_n(\tau), \hat{\hat{z}}^m_n(\tau)) h_{x_i}(\hat{z}^m_n(\tau), \hat{\hat{z}}^m_n(\tau))\, d\tau\Bigg) q(\hat{z}^m_n, \hat{\hat{z}}^m_n)\Bigg) =$$

$$= E\left(\left(\int\limits_{s\wedge\eta^m}^{t\wedge\eta^m} 1_{(H)^c_{\varepsilon_k}}(\tau, \hat z^m(\tau)) f^i(\tau, \hat z^m(\tau), \hat{\hat z}^m(\tau)) h_{x_i}(\hat z^m(\tau), \hat{\hat z}^m(\tau))\, d\tau\right) q(\hat z^m, \hat{\hat z}^m)\right) \equiv J. \qquad (15)$$

Из локальной ограниченности функции f^i и построения f^i_n следует, что для доказательства соотношения (15) достаточно доказать равенство

$$\lim_{n\to\infty} E\left(\left(\int\limits_{s\wedge\eta^m_n}^{t\wedge\eta^m_n} 1_{(H)^c_{\varepsilon_k}}(\tau, \hat z^m_n(\tau)) f^i(\tau, \hat z^m_n(\tau), \hat{\hat z}^m_n(\tau)) h_{x_i}(\hat z^m_n(\tau), \hat{\hat z}^m_n(\tau))\, d\tau\right) q(\hat z^m_n, \hat{\hat z}^m_n)\right) = J. \qquad (16)$$

Пусть $\tilde f^i_r(t, \hat x, \hat{\hat x}) = f^i(t, \hat x, \hat{\hat x}) * J_r(t, \hat x)$, $r \geq 1$. Используя следствие 1 и лемму 2, получаем соотношения

$$\lim_{r\to\infty} \limsup_{n\to\infty} E\left|\left(\int\limits_{s\wedge\eta^m_n}^{t\wedge\eta^m_n} 1_{(H)^c_{\varepsilon_k}}(\tau, \hat z^m_n(\tau))(f^i(\tau, \hat z^m_n(\tau), \hat{\hat z}^m_n(\tau)) -\right.\right.$$

$$\left.\left. - \tilde f^i_r(\tau, \hat z^m_n(\tau), \hat{\hat z}^m_n(\tau))) h_{x_i}(\hat z^m_n(\tau), \hat{\hat z}^m_n(\tau))\, d\tau\right) q(\hat z^m_n, \hat{\hat z}^m_n)\right| \leq$$

$$\leq C \lim_{r\to\infty}\left(\int\limits_{([0,t]\times B_1(0,m))\cap(H)^c_{\varepsilon_k}} \sup_{\|\hat{\hat x}\|\leq m} (\det a(\tau, \hat x, \hat{\hat x}))^{-1} \times\right.$$

$$\left.\times \sup_{\|\hat{\hat x}\|\leq m} |f^i(\tau, \hat x, \hat{\hat x}) - \tilde f^i_r(\tau, \hat x, \hat{\hat x})|^{l+1}\, d\tau\, d\hat x\right)^{1/(l+1)} = 0. \qquad (17)$$

Теперь, учитывая (17), для доказательства равенства (16) остается показать, что

$$\lim_{r\to\infty}\lim_{n\to\infty} E\left(\left(\int\limits_{s\wedge\eta^m_n}^{t\wedge\eta^m_n} 1_{(H)^c_{\varepsilon_k}}(\tau, \hat z^m_n(\tau)) \tilde f^i_r(\tau, \hat z^m_n(\tau), \hat{\hat z}^m_n(\tau)) h_{x_i}(\hat z^m_n(\tau), \hat{\hat z}^m_n(\tau))\, d\tau\right) q(\hat z^m_n, \hat{\hat z}^m_n)\right) = J.$$

Действительно,

$$\lim_{r\to\infty}\lim_{n\to\infty} E\left(\left(\int\limits_{s\wedge\eta^m_n}^{t\wedge\eta^m_n} 1_{(H)^c_{\varepsilon_k}}(\tau, \hat z^m_n(\tau)) \tilde f^i_r(\tau, \hat z^m_n(\tau), \hat{\hat z}^m_n(\tau)) h_{x_i}(\hat z^m_n(\tau), \hat{\hat z}^m_n(\tau))\, d\tau\right) q(\hat z^m_n, \hat{\hat z}^m_n)\right) =$$

$$= \lim_{r\to\infty}\lim_{n\to\infty} E\left[\int\limits_{s\wedge\eta^m}^{t\wedge\eta^m} (1_{(H)^c_{\varepsilon_k}}(\tau, \hat z^m_n(\tau)) \tilde f^i_r(\tau, \hat z^m_n(\tau), \hat{\hat z}^m_n(\tau)) h_{x_i}(\hat z^m_n(\tau), \hat{\hat z}^m_n(\tau)) q(\hat z^m_n, \hat{\hat z}^m_n) -\right.$$

$$- 1_{(H)^c_{\varepsilon_k}}(\tau, \hat z^m(\tau)) \tilde f^i_r(\tau, \hat z^m(\tau), \hat{\hat z}^m(\tau)) h_{x_i}(\hat z^m(\tau), \hat{\hat z}^m(\tau)) q(\hat z^m, \hat{\hat z}^m))\, d\tau +$$

$$+ \int\limits_{s\wedge\eta^m_n}^{s\wedge\eta^m} (1_{(H)^c_{\varepsilon_k}}(\tau, \hat z^m_n(\tau)) \tilde f^i_r(\tau, \hat z^m_n(\tau), \hat{\hat z}^m_n(\tau)) h_{x_i}(\hat z^m_n(\tau), \hat{\hat z}^m_n(\tau)) q(\hat z^m_n, \hat{\hat z}^m_n) -$$

$$- 1_{(H)^c_{\varepsilon_k}}(\tau, \hat z^m(\tau)) \tilde f^i_r(\tau, \hat z^m(\tau), \hat{\hat z}^m(\tau)) h_{x_i}(\hat z^m(\tau), \hat{\hat z}^m(\tau)) q(\hat z^m, \hat{\hat z}^m))\, d\tau +$$

$$+ \int\limits_{t\wedge\eta^m}^{t\wedge\eta^m_n} (1_{(H)^c_{\varepsilon_k}}(\tau, \hat z^m_n(\tau)) \tilde f^i_r(\tau, \hat z^m_n(\tau), \hat{\hat z}^m_n(\tau)) h_{x_i}(\hat z^m_n(\tau), \hat{\hat z}^m_n(\tau)) q(\hat z^m_n, \hat{\hat z}^m_n) -$$

$$- 1_{(H)^c_{\varepsilon_k}}(\tau, \hat{z}^m(\tau)) \tilde{f}^i_r(\tau, \hat{z}^m(\tau), \hat{\hat{z}}^m(\tau)) h_{x_i}(\hat{z}^m(\tau), \hat{\hat{z}}^m(\tau)) q(\hat{z}^m, \hat{\hat{z}}^m)) \, d\tau +$$

$$+ \int\limits_{s\wedge\eta^m}^{t\wedge\eta^m} (1_{(H)^c_{\varepsilon_k}}(\tau, \hat{z}^m(\tau))(\tilde{f}^i_r(\tau, \hat{z}^m(\tau), \hat{\hat{z}}^m(\tau)) - f^i(\tau, \hat{z}^m(\tau), \hat{\hat{z}}^m(\tau))) h_{x_i}(\hat{z}^m(\tau), \hat{\hat{z}}^m(\tau)) q(\hat{z}^m, \hat{\hat{z}}^m)) \, d\tau +$$

$$+ \int\limits_{s\wedge\eta^m_n}^{s\wedge\eta^m} 1_{(H)^c_{\varepsilon_k}}(\tau, \hat{z}^m(\tau)) \tilde{f}^i_r(\tau, \hat{z}^m(\tau), \hat{\hat{z}}^m(\tau)) h_{x_i}(\hat{z}^m(\tau), \hat{\hat{z}}^m(\tau)) q(\hat{z}^m, \hat{\hat{z}}^m) \, d\tau +$$

$$+ \int\limits_{t\wedge\eta^m}^{t\wedge\eta^m_n} 1_{(H)^c_{\varepsilon_k}}(\tau, \hat{z}^m(\tau)) \tilde{f}^i_r(\tau, \hat{z}^m(\tau), \hat{\hat{z}}^m(\tau)) h_{x_i}(\hat{z}^m(\tau), \hat{\hat{z}}^m(\tau)) q(\hat{z}^m, \hat{\hat{z}}^m) \, d\tau \Bigg] + J =$$

$$= \lim_{r\to\infty} \lim_{n\to\infty} (I_1 + I_2 + I_3 + I_4 + I_5 + I_6) + J.$$

Оценим каждое слагаемое: $\lim\limits_{r\to\infty} \lim\limits_{n\to\infty} (|I_2| + |I_3| + |I_5| + |I_6|) = 0$, так как $s \wedge \eta^m_n \underset{n\to\infty}{\to} s \wedge \eta^m$ п.н., $t \wedge \eta^m_n \underset{n\to\infty}{\to} t \wedge \eta^m$ п.н.; по лемме 2 и следствию 2

$$\lim_{r\to\infty} \lim_{n\to\infty} |I_4| \le C_2 \lim_{r\to\infty} \Bigg(\int\limits_{([0,t]\times B_1(0,m))\cap(H)^c_{\varepsilon_k/2}} \sup_{\|\hat{\hat{x}}\|\le m} (\det a(\tau, \hat{x}, \hat{\hat{x}}))^{-1} \times$$

$$\times \sup_{\|\hat{\hat{x}}\|\le m} |f^i(\tau, \hat{x}, \hat{\hat{x}}) - \tilde{f}^i_r(\tau, \hat{x}, \hat{\hat{x}})|^{l+1} \, d\tau \, d\hat{x} \Bigg)^{1/(l+1)} = 0.$$

Покажем, что

$$\lim_{r\to\infty} \lim_{n\to\infty} |I_1| = 0. \tag{18}$$

Для каждого натурального k построим последовательность непрерывных функций $\varphi_j : R_+ \times R^l \to [0, 1]$ такую, что $\varphi_j \le 1_{(H)^c_{\varepsilon_k}}$, $\varphi_j \underset{j\to\infty}{\uparrow} 1_{(H)^c_{\varepsilon_k}}$. Согласно следствиям 1, 2,

$$\lim_{j\to\infty} \lim_{r\to\infty} \limsup_{n\to\infty} E \Bigg| \Bigg(\int\limits_{s\wedge\eta^m}^{t\wedge\eta^m} (1_{(H)^c_{\varepsilon_k}}(\tau, \hat{z}^m_n(\tau)) - \varphi_j(\tau, \hat{z}^m_n(\tau))) \tilde{f}^i_r(\tau, \hat{z}^m_n(\tau), \hat{\hat{z}}^m_n(\tau)) \times$$

$$\times h_{x_i}(\hat{z}^m_n(\tau), \hat{\hat{z}}^m_n(\tau)) \, d\tau \Bigg) q(\hat{z}^m_n, \hat{\hat{z}}^m_n) \Bigg| \le$$

$$\le C_3 \lim_{j\to\infty} \limsup_{n\to\infty} E \Bigg(\int\limits_{s\wedge\eta^m}^{t\wedge\eta^m} 1_{(H)^c_{\varepsilon_k}}(\tau, \hat{z}^m_n(\tau)) (1_{(H)^c_{\varepsilon_k}}(\tau, \hat{z}^m_n(\tau)) - \varphi_j(\tau, \hat{z}^m_n(\tau))) \, d\tau \Bigg) \le$$

$$\le C_4 \lim_{j\to\infty} \Bigg(\int\limits_{([0,t]\times B_1(0,m))\cap(H)^c_{\varepsilon_k}} \sup_{\|\hat{\hat{x}}\|\le m} ((\det a(\tau, \hat{x}, \hat{\hat{x}}))^{-1} (1_{(H)^c_{\varepsilon_k}}(\tau, \hat{x}) - \varphi_j(\tau, \hat{x}))^{l+1}) \, d\tau \, d\hat{x} \Bigg)^{1/(l+1)} = 0, \tag{19}$$

$$\lim_{j\to\infty} \lim_{r\to\infty} E \Bigg(\Bigg(\int\limits_{s\wedge\eta^m}^{t\wedge\eta^m} (1_{(H)^c_{\varepsilon_k}}(\tau, \hat{z}^m(\tau)) - \varphi_j(\tau, \hat{z}^m(\tau))) \tilde{f}^i_r(\tau, \hat{z}^m(\tau), \hat{\hat{z}}^m(\tau)) \times$$

$$\times h_{x_i}(\hat{z}^m(\tau), \hat{\hat{z}}^m(\tau)) \, d\tau \Bigg) q(\hat{z}^m, \hat{\hat{z}}^m) \Bigg) = 0. \tag{20}$$

Так как $(\hat{z}_n^m(\tau), \hat{\hat{z}}_n^m(\tau)) \underset{n\to\infty}{\to} (\hat{z}^m(\tau), \hat{\hat{z}}^m(\tau))$ равномерно по $\tau \in [0,t]$ с вероятностью 1, то

$$\lim_{j\to\infty} \lim_{r\to\infty} \lim_{n\to\infty} E\Bigg(\int\limits_{s\wedge\eta^m}^{t\wedge\eta^m} (\varphi_j(\tau, \hat{z}_n^m(\tau)) \tilde{f}_r^i(\tau, \hat{z}_n^m(\tau), \hat{\hat{z}}_n^m(\tau)) h_{x_i}(\hat{z}_n^m(\tau), \hat{\hat{z}}_n^m(\tau)) q(\hat{z}_n^m, \hat{\hat{z}}_n^m) -$$

$$- \varphi_j(\tau, \hat{z}^m(\tau)) \tilde{f}_r^i(\tau, \hat{z}^m(\tau), \hat{\hat{z}}^m(\tau)) h_{x_i}(\hat{z}^m(\tau), \hat{\hat{z}}^m(\tau)) q(\hat{z}^m, \hat{\hat{z}}^m))\, d\tau \Bigg) = 0. \tag{21}$$

Из соотношений (19)–(21) очевидным образом следует (18). Равенство (16), а значит, и (15) доказано.

Существует последовательность $k_n \to +\infty$ при $n \to \infty$ такая, что

$$\lim_{n\to\infty} E\Bigg(\Bigg(\int\limits_{s\wedge\eta_n^m}^{t\wedge\eta_n^m} 1_{(H)^c_{\varepsilon_{k_n}}}(\tau, \hat{z}_n^m(\tau)) f_n^i(\tau, \hat{z}_n^m(\tau), \hat{\hat{z}}_n^m(\tau)) h_{x_i}(\hat{z}_n^m(\tau), \hat{\hat{z}}_n^m(\tau))\, d\tau \Bigg) q(\hat{z}_n^m, \hat{\hat{z}}_n^m) \Bigg) =$$

$$= E\Bigg(\Bigg(\int\limits_{s\wedge\eta^m}^{t\wedge\eta^m} 1_{H^c}(\tau, \hat{z}^m(\tau)) f^i(\tau, \hat{z}^m(\tau), \hat{\hat{z}}^m(\tau)) h_{x_i}(\hat{z}^m(\tau), \hat{\hat{z}}^m(\tau))\, d\tau \Bigg) q(\hat{z}^m, \hat{\hat{z}}^m) \Bigg). \tag{22}$$

Из леммы 2.5 [5], соотношения (22) и непрерывности функции $f^i(t,X)$ на множестве $\{(t, x_1, \ldots, x_d) |\ (t, x_1, \ldots, x_l) \in H(1, \ldots, l)\}$ вытекает равенство

$$\lim_{n\to\infty} E\Bigg(\Bigg(\int\limits_{s\wedge\eta_n^m}^{t\wedge\eta_n^m} 1_{(H)_{\varepsilon_{k_n}}}(\tau, \hat{z}_n^m(\tau)) f_n^i(\tau, \hat{z}_n^m(\tau), \hat{\hat{z}}_n^m(\tau)) h_{x_i}(\hat{z}_n^m(\tau), \hat{\hat{z}}_n^m(\tau))\, d\tau \Bigg) q(\hat{z}_n^m, \hat{\hat{z}}_n^m) \Bigg) =$$

$$= E\Bigg(\Bigg(\int\limits_{s\wedge\eta^m}^{t\wedge\eta^m} 1_{H}(\tau, \hat{z}^m(\tau)) f^i(\tau, \hat{z}^m(\tau), \hat{\hat{z}}^m(\tau)) h_{x_i}(\hat{z}^m(\tau), \hat{\hat{z}}^m(\tau))\, d\tau \Bigg) q(\hat{z}^m, \hat{\hat{z}}^m) \Bigg). \tag{23}$$

Учитывая соотношения (22), (23) и $P^{\Psi_n} = P^{\varepsilon_n}$, получаем, что

$$\lim_{n\to\infty} E\Bigg(\Bigg(\int\limits_{s\wedge\tau_n^m}^{t\wedge\tau_n^m} f_n^i(\tau, X_n^m(\tau)) h_{x_i}(X_n^m(\tau))\, d\tau \Bigg) q(X_n^m) \Bigg) =$$

$$= E\Bigg(\Bigg(\int\limits_{s\wedge\eta^m}^{t\wedge\eta^m} f^i(\tau, z^m(\tau)) h_{x_i}(z^m(\tau))\, d\tau \Bigg) q(z^m) \Bigg). \tag{24}$$

Аналогичными рассуждениями для каждых фиксированных $i, j \in \{1, \ldots, d\}$ устанавливается справедливость равенства

$$\lim_{n\to\infty} E\Bigg(\Bigg(\int\limits_{s\wedge\tau_n^m}^{t\wedge\tau_n^m} \sigma_n^{ij}(\tau, X_n^m(\tau)) h_{x_i x_j}(X_n^m(\tau))\, d\tau \Bigg) q(X_n^m) \Bigg) =$$

$$= E\Bigg(\Bigg(\int\limits_{s\wedge\eta^m}^{t\wedge\eta^m} \sigma^{ij}(\tau, z^m(\tau)) h_{x_i x_j}(z^m(\tau))\, d\tau \Bigg) q(z^m) \Bigg). \tag{25}$$

Из соотношений (14), (24), (25) получаем равенство

$$E\left(\left(h(z^m(t))-h(z^m(s))-\int\limits_{s\wedge\eta^m}^{t\wedge\eta^m}\left(\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{d}\sigma^{ij}(\tau,z^m(\tau))h_{x_ix_j}(z^m(\tau))+\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.+\sum_{i=1}^{d}f^i(\tau,z^m(\tau))h_{x_i}(z^m(\tau))\right)d\tau\right)q(z^m)\right)=0,$$

поэтому процесс

$$h(z(t))-h(z(0))-\int\limits_0^t\left(\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{d}\sigma^{ij}(\tau,z(\tau))h_{x_ix_j}(z(\tau))+\sum_{i=1}^{d}f^i(\tau,z(\tau))h_{x_i}(z(\tau))\right)d\tau$$

является локальным $(\mathcal{F}_t)$-мартингалом.

Как показано в [6, с. 159–160], на расширении $(\tilde\Omega,\tilde{\mathcal{F}},\tilde P)$ с потоком $\tilde{\mathcal{F}}_t$ вероятностного пространства $(\Omega,\mathcal{F},P)$ с потоком $\mathcal{F}_t$ можно определить $(\tilde{\mathcal{F}}_t)$-броуновское движение $\tilde W(t)$ с $\tilde W(0)=0$ п.н. такое, что с вероятностью 1 для любого $t\in[0,e)$ выполняется равенство

$$z(t)=z(0)+\int\limits_0^t f(\tau,z(\tau))\,d\tau+\int\limits_0^t g(\tau,z(\tau))\,d\tilde W(\tau).$$

Следовательно, $(\tilde\Omega,\tilde{\mathcal{F}},\tilde P,\tilde{\mathcal{F}}_t,\tilde W(t),z(t),e)$ – слабое решение уравнения (1). Теорема доказана.

Рассмотрим следующий пример:

$$dx_1(t)=(r(x_1(t))+tx_2^2(t))\,dt+r(x_2(t))\,dW_1(t),\quad dx_2(t)=r(x_2(t)+1)\,dt+x_2(t)\,dW_1(t),$$

где $r(x)=\begin{cases}1, & x\ge 0,\\ -1, & x<0.\end{cases}$ Функция $\sigma=gg^{\mathrm{T}}$ непрерывна, поэтому для нее условие A) выполняется. Рассмотрим функцию f. Для функции $f^{(1)}(t,x_1,x_2)=r(x_1)+tx_2^2$ выберем первую строку матрицы g, множество $H(1)$ пусто, а для $f^{(2)}(t,x_1,x_2)=r(x_2+1)$ выберем вторую строку матрицы g, множество $H(2)\times\{x_1\in R\}=\{(t,x_1,x_2)|\ \ t\in R_+,\ x_1\in R,\ x_2=0\}$, очевидно, содержится во множестве точек непрерывности отображения $f^{(2)}$. Следовательно, для функции f условие A) выполняется. По теореме настоящей работы для любой заданной вероятности ν на $(R^d,\mathcal{B}(R^d))$ существует слабое решение с начальным распределением ν. Отметим, что из известных теорем [1–5] не вытекает существование слабых решений рассматриваемой системы.

Авторы выражают благодарность рецензенту за замечания, позволившие улучшить содержание работы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Скороход А.В.* Исследования по теории случайных процессов. Киев, 1961.
2. *Крылов Н.В.* Управляемые процессы диффузионного типа. М., 1977.
3. *Веретенников А.Ю.* // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1983. Т. 47. Вып. 1. С. 188–196.
4. *Nisio M.* // Osaka J. Math. 1973. V. 10. № 1. P. 185–208.
5. *Rozkosz A., Slominski L.* // Stochastic Processes and their Applications. 1997. V. 68. P. 285–302.
6. *Ватанабэ С., Икэда Н.* Стохастические дифференциальные уравнения и диффузионные процессы. М., 1986.
7. *Мейер П.-А.* Вероятность и потенциалы. М., 1973.
8. *Himmelberg C. J.* // Rend. Semin. Mat. Univ. Padova, 1973. V. 50. P. 185–188.

Белорусский государственный университет,
г. Минск

Поступила в редакцию
18.04.2006 г.