

Кватернионность Ω -алгебр со специальным ветвлением

Пусть F – вещественное поле (т.е. -1 не является суммой квадратов элементов из F), Ω – множество упорядочений поля F и F_v – вещественное замыкание поля F относительно $v \in \Omega$. Для 2-кручения ${}_2BrF$ (соответственно ${}_2BrF_v$) группы Брауэра BrF (соответственно BrF_v) поля F (соответственно F_v) расширение поля скаляров $F \rightarrow F_v$ индуцирует естественный гомоморфизм

$${}_2BrF \rightarrow \prod_{v \in \Omega} {}_2BrF_v,$$

с ядром $Br_\Omega F$. Ниже нам потребуется следующее

О п р е д е л е н и е. Центральная простая алгебра A над F называется Ω -алгеброй, если она представляет элемент из $Br_\Omega F$.

В этой заметке мы рассматриваем случай, когда $F = K(x)$, где $K(x)$ – поле рациональных функций над K , $K = \mathbf{R}((t))$ – поле формальных степенных рядов над $\mathbf{R}$. Основная гипотеза, связанная с Ω -алгебрами над таким F , состоит в том, что все они имеют индекс, не превосходящий 2 (см. [1], а также [2], [3]).

Приведем вначале необходимые обозначения и соглашения.

Для произвольного поля L и ненулевого элемента $a \in L$ запись $a \sim 1$ означает, что $a \in (L^*)^2$. Хорошо известно, что все нормирования тривиальные на $\mathbf{R}((t))$ поля F связаны с локальными кольцами замкнутых точек проективной прямой $\mathbf{P}_K^1$. Соответствующие униформизирующие (унитарные неприводимые над K многочлены f и $\frac{1}{x}$) нумеруют нормирования v_f, v_∞ . Для алгебры A/F через A_f, A_∞ будем обозначать алгебры $A \otimes_F F_f, A \otimes_F F_\infty$, где F_f (соответственно F_∞) – пополнение F относительно v_f (соответственно v_∞). Для алгебр A и B мы пишем $A \sim B$ и говорим, что A и B подобны, если $\overline{A} = \overline{B}$ в BrF ; запись $A \sim 1$ эквивалентна $\overline{A} = 0$ в BrF , через $Ram(A)$ обозначается локус ветвления алгебры A . Кватернионная F -алгебра, связанная с парой $a, b \in F^*$, будет обозначаться через $\left(\frac{a, b}{F}\right)$ (или просто (a, b)).

Различные специальные случаи этой гипотезы были рассмотрены в [1]. Основной целью заметки является обобщение результатов из [1] в уточняемом ниже смысле.

Пусть локус ветвления $Ram(A)$ алгебры A имеет вид $\overline{Q_1, \dots, Q_c, R_1, \dots, R_n, M_1, \dots, M_e}$, где $\deg Q_i = \deg R_j = 2, \deg M_k \in 4\mathbf{Z}$, $Q_i(x_i) = 0, R_j(y_j) = 0, M_k(z_k) = 0, x_i \in (K(x_i)^*)^2, y_j \notin (K(y_j)^*)^2, z_k \notin (K(z_k)^*)^2, y_j = t^{v(y_j)} w_j, \overline{w_j}$ – вычет единицы w_j по модулю t . Тогда справедлива следующая

Т е о р е м а. Пусть локус ветвления $Ram(A)$ такой как выше, причем все числа $\overline{w_j}$ отрицательны. Тогда $ind A \leq 2$.

В доказательстве основного результата мы существенно используем следующее утверждение.

Л е м м а. Пусть $C = R_1 \dots R_m$ – произведение всех многочленов R_j , для которых $\overline{w_j} \in \mathbf{R}^{<0}$. Тогда существует многочлен

$$G = \prod_{i=1}^l ((x + ta_i^2)(x + tb_i^2)),$$

такой, что

$$a_i, b_i \in K^*, v_K(a_i) = v_K(b_i), (C, G) \sim (C, t)$$

над $K(x)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Разобьем множество $\overline{y_1}, \dots, \overline{y_m}$ на подмножества P_{ik} следующим образом: в каждом подмножестве все элементы имеют одинаковые нормирования и одинаковые вычеты единиц w_j по модулю t , а элементы из разных подмножеств имеют различные нормирования или различные вычеты единиц w_j по модулю t . Пусть

$$P_{ik} = \overline{y_{ijk}} : v_K(y_{ijk}) = 2l_k + 1, y_{ijk} = t^{2l_k+1} u_{ijk}, \overline{u_{ijk}} = \overline{w_{ik}}, j = \overline{1, q_i},$$

причем w_{ik} попарно различны и то же самое верно для $l_k, i = \overline{1, p}, k = \overline{1, r}$.

Положим $u_{ijk} = \sum_{s=0}^{\infty} u_{sijk} t^s$ и зафиксируем $\alpha_{ik}, \beta_{ik} \in \mathbf{R}^{>0}$, такие, что

$$\alpha_{ik} \neq -u_{1ijk}, \beta_{ik} \neq -w_{ck}$$

для любых $i = \overline{1, p}, c = \overline{1, r}, k = \overline{1, r}$. Выберем также элементы $a_{ik}, b_{ik} \in K^*$, такие, что

$$a_{ik}^2 = t^{2l_k} (-w_{ik} + \alpha_{ik} t), b_{ik}^2 = t^{2l_k} \beta_{ik}.$$

Пусть $G = \prod_{i=1}^p \prod_{k=1}^r g_{ik}$, где

$$g_{ik} = (x + ta_{ik}^2)(x + tb_{ik}^2).$$

Тогда

$$y_{ijk} + ta_{ik}^2 = t^{2l_k+1} (t(u_{1ijk} + \alpha_{ik}) + \sum_{s=2}^{\infty} u_{sijk} t^s) \sim t^{2l_k+2} \sim 1,$$

$$y_{ijk} + tb_{ik}^2 = t^{2l_k+1} ((w_{ik} + \beta_{ik}) + \sum_{s=1}^{\infty} u_{sijk} t^s) \sim t^{2l_k+1} \sim t$$

в $K(y_{ijk})$.

Поэтому для любого $j = \overline{1, q_i}$ $g_{ik}(y_{ijk}) \sim t$ в $K(y_{ijk})$.

Как отмечалось в [1], локус ветвления $Ram(A)$ нетривиальной Ω –алгебры A состоит из многочленов, являющихся суммами квадратов, причем $A_{\infty} \sim 1$. Так как $K(y_{ijk}) = \mathbf{C}((t))$, $a_{ik} \in K^*, b_{ik} \in K^*$, то

$$R_{ijk}(-ta_{ik}^2) \sim 1, R_{ijk}(-tb_{ik}^2) \sim 1$$

в K^* , поэтому $(R_{ijk}, g_{ik}) \sim (R_{ijk}, t)$ для любого $j = \overline{1, q_i}$.

Если $k \neq h$, то

$$y_{djh} + ta_{ik}^2 = t^{2l_h+1} u_{djh} + t^{2l_k+1} (-w_{ik} + \alpha_{ik} t),$$

ПОЭТОМУ

$$y_{djh} + ta_{ik}^2 \sim t^{2l_h+1} \sim t$$

ИЛИ

$$y_{djh} + ta_{ik}^2 \sim t^{2l_k+1} \sim t$$

в $K(y_{djh})$;

$$y_{djh} + tb_{ik}^2 = t^{2l_h+1}u_{djh} + t^{2l_k+1}\beta_{ik}t,$$

следовательно,

$$y_{djh} + tb_{ik}^2 \sim t^{2l_h+1} \sim t$$

ИЛИ

$$y_{djh} + ta_{ik}^2 \sim t^{2l_k+1} \sim t$$

в $K(y_{djh})$.

При $d \neq i$ будем иметь

$$y_{djk} + ta_{ik}^2 = t^{2l_k+1}((-w_{ik} + w_{dk}) + t(u_{1ijk} + \alpha_{ik}) + \sum_{s=2}^{\infty} u_{sijk} t^s) \sim t^{2l_k+1} \sim t,$$

$$y_{djk} + tb_{ik}^2 = t^{2l_k+1}((w_{dk} + \beta_{ik}) + \sum_{s=1}^{\infty} u_{sijk} t^s) \sim t^{2l_k+1} \sim t$$

в $K(y_{djk})$, причем

$$R_{djk}(-ta_{ik}^2) \sim 1, R_{djk}(-tb_{ik}^2) \sim 1,$$

ибо $K(y_{djk}) = C((t))$, $a_{ik} \in K^*$, $b_{ik} \in K^*$.

Итак, в случаях $d \neq i$ или $k \neq h$ алгебра (R_{djh}, g_{ik}) тривиальна для любого $j = \overline{1, q_i}$. Таким образом,

$$(C, G) \sim \prod_{i,k}^{\otimes} (C, g_{ik}) \sim \prod_{i,k}^{\otimes} (\prod_{j=1}^{q_i} R_{ijk}, g_{ik}) \sim \prod_{i,k}^{\otimes} (\prod_{j=1}^{q_i} R_{ijk}, t) \sim (C, t),$$

что и требовалось доказать.

Д о к а з а т е л ь с т в о т е о р е м ы. Заметим, что для выбранного многочлена G алгебры $(Q, G), (M, G)$ тривиальны, а алгебры (x, G) и (t, G) подобны над $K(x)$. Действительно, ввиду $a_i, b_i \in K^*$, имеем

$$(x, g_i) \sim (t, g_i), (x, G) \sim \prod_{i=1}^l^{\otimes} (x, g_i) \sim \prod_{i=1}^l^{\otimes} (t, g_i) \sim (t, G).$$

Так как $Q_j(-ta_i^2), Q_j(-tb_i^2)$ – квадраты в K^* и

$$v_K(x_j) \neq v_K(-ta_i^2) = v_K(-tb_i^2)$$

(в силу четности $v_K(x_j)$ и $v_K(-ta_i^2) = v_K(-tb_i^2) \equiv 1 \pmod{2}$), то

$$g_i(x_j) = (x_j + ta_i^2)(x_j + tb_i^2) \sim x_j^2 \sim 1$$

ИЛИ

$$g_i(x_j) \sim (ta_i^2)(tb_i^2) \sim 1$$

в $K(x_j) = C((t))$, поэтому

$$(Q_j, g_i) \sim 1, (Q, g_i) \sim \prod_{j=1}^c^{\otimes} (Q_j, g_i) \sim 1, (Q, G) \sim \prod_{i=1}^l^{\otimes} (Q, g_i) \sim 1.$$

Поскольку степени M_k кратны 4, $z_k \notin (K(z_k)^*)^2$ и R_j – квадратичные многочлены, то

$$v_{L_k}(z_k) \neq v_{L_k}(-ta_i^2) = v_{L_k}(-tb_i^2)$$

в $L_k = K(z_k)$. Аналогично устанавливается, что $(M, G) \sim 1$.

Предположим теперь, что $R = C$. Тогда алгебры $(-txQRM, G), (R, t)$ подобны. Следовательно,

$$(-txQRM, tQG) \sim (x, t).$$

Поэтому поле $K(x)(\sqrt{-txQRM})$ является полем расщепления алгебры (t, x) .

Кроме того, исходя из вида локуса ветвления $Ram(A)$, заключаем, что

$$A \sim (QR, t) \otimes (M, x) \sim (-txQRM, tM) \otimes (t, x).$$

Откуда следует, что $ind A \leq 2$. Теорема доказана.

Литература

1. Буш у е в И. А., Я н ч е в с к и й В. И. *Об алгебрах экспоненты два тривиальных во всех вещественных замыканиях их центров* // Докл. НАНБ. 2002. Т. 46, № 2. С. 18 – 20.
2. P f i s t e r A. // Contemp. Math. 1982. Vol 8. P. 249 – 264.
3. P f i s t e r A. // London Math. Soc. Lect. Notes, Cambridge Univ. Press. 1995.