МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ

БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

Кафедра теории функций

Бондарев
Сергей Александрович

ТОНКИЕ СВОЙСТВА ФУНКЦИЙ ИЗ ПРОСТРАНСТВ ХАЙЛАША–СОБОЛЕВА

Дипломная работа

Научный руководитель:
доктор физ.-мат. наук
профессор В.Г. Кротов

Допущена к защите
"____" ________________ 2015 г.
Заведующий кафедрой теории функций,
доктор физ.-мат. наук, профессор В.Г. Кротов

Минск, 2015

Содержание

Реферат

Дипломная работа содержит 24 страницы, 0 иллюстраций, 28 использованных источников.

Ключевые слова: АНАЛИЗ НА МЕТРИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВАХ С МЕРОЙ, ПРОСТРАНСТВА ХАЙЛАША–СОБОЛЕВА, ТОНКИЕ СВОЙСТВА ФУНКЦИЙ.

В дипломной работе изучаются свойства новых точек Лебега для функций из пространств Хайлаша–Соболева. Получены следующие результаты

1. Оценка массивности исключительного множества в терминах мер Хаусдорфа.

2. Оценка массивности исключительного множества в терминах емкостей.

3. Исследовано влияние скорости сходимости элементов наилучшего приближения $I_B^{(p)}f$, которые служат заменой средним интегральным, на «размер» исключительного множества.

Результаты являются новыми при $0 < p \leqslant 1$.

Дипломная работа выполнена автором самостоятельно.

Рэферат

Дыпломная праца ўтрымлівае 24 старонкі, 0 ілюстрацый, 28 выкарыстаных крыніц.

Ключавыя словы: АНАЛІЗ НА МЕТРЫЧНЫХ ПРАСТОРАХ З МЕРАЙ, ПРАСТОРЫ ХАЙЛАША–СОБАЛЕВА, ТОНКІЯ ЎЛАСЦІВАСЦІ ФУНКЦЫЙ.

У дыпломнай працы вывучаюцца ўласцівасці новых кропак Лебега для функцый з прастор Хайлаша–Собалева. Атрыманы наступныя вынікі

1. Ацэнка масіўнасці выключнага мноства ў тэрмінах мер Хаусдорфа.

2. Ацэнка масіўнасці выключнага мноства ў тэрмінах ёмкасцей.

3. Даследаван уплыў хуткасці збежнасці элементаў найлепшага набліжэння $I_B^{(p)} f$, якія служаць заменай сярэднім інтэгральным, на «памер» выключнага мноства.

Вынікі з'яўляюцца новымі пры $0 < p \leqslant 1$.

Дыпломная праца выканана аўтарам самастойна.

Abstract

Thesis contains 24 pages, 0 illustrations, 28 sources used.

Key words: ANALYSIS ON METRIC MEASURE SPACES, HAJŁASZ–SOBOLEV SPACES, FINE PROPERTIES OF FUNCTIONS.

The research paper examines the properties of new Lebesgue points for functions belong to Hajłasz–Sobolev spaces. Following results are obtained

1. Estimate of the size of the exceptional set in terms of Hausdorff measures.

2. Estimate of the size of the exceptional set in terms of capacities.

3. Investigated the effect of the best approximation elements $I_B^{(p)}f$, which replace integral averages, rate convergence on «size» of exceptional set.

Results are new for $0 < p \leqslant 1$.

Thesis work is done by the author on his own.

Введение

Объектом исследования являются обобщенные классы Соболева $W^p_\alpha(X)$ на любом метрическом пространстве с мерой, которые дают единственный в настоящее время способ измерения гладкости в терминах пространств L^p в рассматриваемом общем контексте. Поэтому представляет интерес следующая общая проблема: в какой степени свойства функций из классов Соболева на евклидовых пространствах сохраняются для классов $W^p_\alpha(X)$.

Целью дипломной работы являются количественные оценки массивности множества Лебега для функций из классов Соболева $W^p_\alpha(X)$ при $p > 0$ на произвольном метрическом пространстве X с мерой, удовлетворяющей условию удвоения.

Основные задачи дипломной работы состоят в следующем:

1. Определить точки Лебега для несуммируемых функций.

2. Изучить массивность множества точек Лебега для функций из классов Соболева в терминах мер Хаусдорфа и соответствующих емкостей.

3. Изучить аналогичный вопрос для точек Лебега со скоростью.

1 История вопроса

Пространства Соболева $W_k^p(\mathbb{R}^n)$ были введены в середине 30-х годов (см. [2, 3]). Они играют важную роль в анализе и его приложениях, например, в линейной и нелинейной теории уравнений с частными производными. Пространства Соболева дают возможность определить гладкость функций в форме, удобной практически для любых целей. Этим обусловлены их широкие применения во многих областях математики. Эту же роль выполняют и различные обобщения этих пространств, например, на случай нецелых значений k. Изучению различных свойств функций из этих классов посвящено огромное число работ (см., например, [4, 11, 12]).

Пространство Соболева $W_1^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \leqslant p < \infty$ состоит из (классов эквивалентности) функций $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ таких, что $|\nabla f| \in L^p(\mathbb{R}^n)$. Здесь ∇f — вектор частных производных, понимаемых в смысле обобщенных функций (см., например, [1, §2.1, с. 143–144]). Оно является банаховым пространством относительно нормы

$$\|f\|_{W_1^p(\mathbb{R}^n)} = \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} + \|\nabla f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}.$$

В последние годы значительно вырос интерес к анализу на метрических пространствах с мерой, а в частности — к исследованию пространств гладких функций на таких структурах. Это связано, например, с интенсивным развитием теории фракталов, римановых пространств, пространств Харди и нелинейного гармонического анализа. Вследствие этого особый интерес представляет определение пространств Соболева в наиболее общем контексте — см. [16, 17].

Классы Соболева $W_1^p(X)$, $1 < p < \infty$, на произвольном метрическом пространстве X с мерой μ были введены польским математиком П.Хайлашем в 1996 году [16] (см. также [19, 20]) В случае $X = \mathbb{R}^n$ пространство Хайлаша–Соболева $W_1^p(X)$ совпадает с классическим пространством Соболева [16].

Отметим результат А.Кальдерона [23], который задолго до П.Хайлаша дал описание $W_1^p(\mathbb{R}^n)$ в терминах, не использующих ничего, кроме меры и метрики.

В 2003 году в работах Я.Ху и Д.Янга [18, 24] появились дробные шкалы пространств Соболева $W_\alpha^p(X)$, $\alpha > 0$, $1 < p < \infty$, которые рассматривались на фракталах в $\mathbb{R}^n$ [18] и в контексте пространств однородного типа [24]. В настоящее время есть целый ряд эквивалентных описаний этих пространств на любом метрическом пространстве [24].

Основной вопрос, затронутый в дипломной работе, касается точек Лебега для функций из пространств Хайлаша–Соболева W_α^p при $p > 0$.

Классическая *теорема Лебега* утверждает(см. [21]), что для *любой функции* $f \in L_{\mathrm{loc}}^p(\mathbb{R}^n), p \geqslant 1$ *почти все точки являются точками Лебега, то* *есть для μ-почти всех $x \in \mathbb{R}^n$ существует*

$$\lim_{r\to+0} \frac{1}{\mu\big(B(x,r)\big)} \int\limits_{B(x,r)} f\,d\mu = f^*(x) \tag{1}$$

и функция f^* эквивалентна f. Важность этого результата, в частности, состоит в том, что он дает естественное определение значений функции $f \in L^p_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ почти всюду.

Как оценить размеры исключительного множества, если функция будет более регулярной? Эта задача имеет достаточно богатую историю. В случае, когда функция принадлежит пространству Соболева $W^p_k(\mathbb{R}^n)$, ответ на этот вопрос грубо можно сформулировать так — исключительное множество имеет нулевую емкость и его размерность Хаусдорфа невелика.

Емкость и размерность Хаусдорфа дополнения ко множеству Лебега[1] для $W^p_1(\mathbb{R}^n)$ была оценена в 1972 году в работе Х.Федерера–В.Зимера [25].

Позже результаты из [25] были распространены на пространства Соболева $W^p_k(\mathbb{R}^n)$ и на их обобщения — пространства бесселевых потенциалов. Это было сделано в работах Т.Бэгби–В.Зимера [28], С.Кальдерона–Е.Фейбса–Н.Ривьера [26] и Н.Мейерса [27].

В последнее время такая проблематика изучалась в более общей ситуации пространств Соболева $W^p_1(X)$, где X — метрическое пространство с мерой: П.Хайлаш (P.Hajłasz), Ю.Киннунен (J.Kinnunen), О.Мартио (O.Martio), В.Латвала (V.Latvala), В.Г.Кротов, М.А.Прохорович.

Отметим, что исследуемые свойства функций не являются инвариантными относительно изменения значений на множестве меры нуль. Такие свойства в современной теории функций обычно называют «тонкими». Для их изучения приходится использовать довольно сложные способы оценки массивности множеств меры нуль с помощью подходящего аппарата — емкостей, порождаемых функциональными пространствами, а также мер и размерностей Хаусдорфа.

[1]Множеством Лебега мы называем множество точек, в которых выполнено соотношение (1).

2 Необходимые определения и обозначения

2.1 Пространства однородного типа

Пусть (X, d) — метрическое пространство с метрикой d. Шар с центром в точке $x \in X$ радиуса $r > 0$, порожденный метрикой d, обозначаем через

$$B(x, r) = \big\{y \in X : d(x, y) < r\big\}.$$

Часто для шара мы будем использовать сокращенное обозначение B, тогда радиус шара обозначается через r_B.

Для $\lambda > 0$ через λB обозначаем шар радиуса λr, концентрический с B.

Счетно-аддитивная мера μ на X называется борелевской, если класс μ-измеримых множеств содержит все борелевские множества (см., например, [5, с. 27], а также [6, с. 82, определение 7.1.1]). Регулярность меры означает, что для любого μ-измеримого множества $E \subset X$ существуют открытое множество $A \supset E$ и замкнутое множество $B \subset E$, такие что $\mu(A \setminus B) = 0$ (см., например, [6, с. 84, определение 7.1.5], или [7, с. 153]).

Всюду далее на протяжении нашей работы мы рассматриваем регулярные борелевские меры, а также предполагаем выполненным следующее условие — существует такая постоянная a_μ, что

$$\mu\big(B\,(x, 2r)\big) \leqslant a_\mu \mu\big(B\,(x, r)\big), \quad x \in X, \quad r > 0. \tag{2}$$

Это условие обычно называют условием удвоения.

В случае, когда мера μ и метрика d связаны условием (2), тройку (X, d, μ) называют пространством однородного типа (см. [14, с. 588], [15, с. 67], [22, с. 113]).

Нетривиальные примеры пространств однородного типа можно найти, например, в [14, с. 588–590], [15, с. 68].

Условию (2) можно придать количественный вид — при условии (2) для некоторого $\gamma > 0$ (можно взять $\gamma = \log_2 a_\mu$) выполнено неравенство

$$\mu(B(x, R)) \leqslant a_\mu \left(\frac{R}{r}\right)^\gamma \mu(B(x, r)), \quad x \in X,\ 0 < r \leqslant R. \tag{3}$$

Число γ называется показателем удвоения и играет роль «размерности» пространства X.

2.2 Функциональные пространства

Через $L^p(X)$, $0 < p < \infty$, обозначаем множество классов эквивалентности измеримых функций, для которых конечно выражение

$$\|f\|_{L^p(X)} = \left[\int\limits_X |f|^p \, d\mu\right]^{1/p}. \tag{4}$$

Отметим, что (4) является нормой только при $p \geqslant 1$. При $0 < p < 1$ не выполняется неравенство треугольника, в этом случае (4)— квазинорма.

$L^p_{\mathrm{loc}}(X)$ — множество локально интегрируемых в p–ой степени функций.

Замечание 1. Условие регулярности меры обеспечивает нам следующее свойство — непрерывные функции с ограниченными носителями плотны в $L^p(X)$, $p > 0$ (см., например, [7, с. 187]).

На протяжении всей работы будут использоваться обозначения

$$f_B = \fint\limits_B f \, d\mu = \frac{1}{\mu(B)} \int\limits_B f \, d\mu$$

для среднего значения функции $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(X)$ по шару $B \subset X$.

Через c всюду обозначаем различные положительные постоянные, зависящие, возможно, от определенных параметров, но эти зависимости для нас несущественны. Кроме того, запись $A \lesssim B$ всегда будет означать, что $A \leqslant cB$.

2.3 Пространства Соболева

Пусть $\alpha > 0$ и $0 < p < \infty$. Для функции $f \in L^p(X)$ обозначим через $D_\alpha(f)$ класс всех неотрицательных μ-измеримых функций g, для каждой из которых существует такое множество $E \subset X$, $\mu(E) = 0$, что

$$|f(x) - f(y)| \leqslant \big[d(x, y)\big]^\alpha [g(x) + g(y)], \quad x, y \in X \setminus E. \tag{5}$$

Элементы $D_\alpha(f)$ называются обобщенными α-градиентами функции f.

Введем шкалу классов Соболева $W^p_\alpha(X)$ $(0 < p < \infty$ и $\alpha > 0)$

$$W^p_\alpha(X) = \{f \in L^p(X) : D_\alpha[f] \cap L^p(X) \neq \varnothing\}. \tag{6}$$

Эти классы нормируются следующим образом

$$\|f\|_{W^p_\alpha(X)} = \|f\|_{L^p(X)} + \inf\left\{\|g\|_{L^p(X)} : g \in D_\alpha[f] \cap L^p(X)\right\}. \tag{7}$$

Заметим, однако, что при $0 < p < 1$ выражение 7 является квазинормой.

При $\alpha = 1$ эти классы были введены в работе П.Хайлаша [16]. В случае $X = \mathbb{R}^n$ пространство W^p_1 совпадает с классическим пространством Соболева [16]. При $\alpha > 0$ они впервые появились в [18, 24].

2.4 Вместимость и размерность Хаусдорфа. Емкости

Пусть $E \subset X$. Введем s–вместимость $H^s_\infty(E)$ Хаусдорфа

$$H^s_\infty(E) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} r_i^s : E \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} B(x_i, r_i) \right\},$$

где точная нижняя грань берется по всевозможным покрытиям множества E шарами.

Размерность Хаусдорфа определяется как

$$\dim_{\mathrm{H}}(E) = \inf \left\{ s : H^s_\infty(E) = 0 \right\}.$$

Классы W^p_α стандартным путём порождают соответствующие ёмкости

$$\mathrm{Cap}_{\alpha,p}(E) = \inf \left\{ \|f\|^p_{W^p_\alpha(X)} : f \in W^p_\alpha(X), f \geqslant 1 \text{ в окрестности } E \subset X \right\}.$$

Перечисленные выше понятия являются «измерителями» массивности исключительных множеств.

Неотрицательная функция ν, определенная на σ–алгебре борелевских подмножеств X называется внешней мерой, если она монотонна и субаддитивна. Для измеримой функции f и внешней меры ν на X положим

$$\|f\|_{L^p_\nu(X)} = \left(p \int_0^{\infty} \lambda^{p-1} \nu \left\{ f > \lambda \right\} \, d\lambda \right)^{1/p}, p > 0.$$

Если ν является мерой, то эта величина совпадает с

$$\|f\|_{L^p_\nu(X)} = \left(\int_X |f|^p \, d\nu \right)^{1/p}. \tag{8}$$

Заметим, что при $0 < p < 1$ (8) нормой не является (однако является квазинормой).

2.5 Максимальные операторы

Основными техническими средствами для доказательства наших теорем являются максимальный оператор $\mathcal{A}^{(p)}_\alpha f$ и усеченная дробная максимальная функция $M_{\beta,R}$. Определим максимальный оператор $\mathcal{A}^{(p)}_\alpha f$ следующим образом

$$\mathcal{A}^{(p)}_\alpha f(x) = \sup_{x \in B, r_B < 1} \frac{A_p(f, B)}{r^\alpha},$$

где

$$A_p(f, B) = \inf_I \left(\fint_B |f(y) - I|^p \, d\mu(y) \right)^{1/p}, p > 0. \tag{9}$$

Введем усеченную дробную максимальную функцию

$$M_{\beta,R}\, g(x) = \sup_{0<r<R} r^{\beta} \fint_{B(x,r)} |g| \, d\mu. \tag{10}$$

Легко видеть, что для любого шара $B \subset X$ и функции $f \in L^p(X)$ существует элемент наилучшего приближения, т.е. число $I_B^{(p)} f$, реализующее inf в (9). Числа $I_B^{(p)} f$ будут служить заменой интегральным средним при $0 < p < 1$. Заметим, что $I_B^{(p)} f$ может определяться неоднозначно. В этом случае выбираем любое из возможных значений $I_B^{(p)} f$.

3 Вспомогательные утверждения

Для доказательства основных теорем нам понадобится ряд результатов, большинство из которых известны при $p > 1$. Оформим их в виде лемм. Если не оговорено противное, то всюду далее предполагается, что $p > 0$, $\alpha > 0$.

Лемма 1. *Пусть $E \subset X$, $0 < \alpha \leqslant 1$, $\gamma > \alpha p$. Тогда справедливы следующие утверждения.*

1) Емкость $\mathrm{Cap}_{\alpha,p}$ является внешней мерой и

$$\mathrm{Cap}_{\alpha,p}(E) = \inf\left\{\mathrm{Cap}_{\alpha,p}(O) : E \subset O, O - \textit{открыто}\right\}$$

2)

$$\mathrm{Cap}_{\alpha,p}\left(B(x_0,r)\right) \leqslant cr^{-\alpha p}\mu\left(B(x_0,r)\right), x_0 \in X, 0 < r \leqslant 1.$$

3) При $0 < \beta \leqslant \alpha$

$$\mathrm{Cap}_{\alpha,p}(E) = 0 \Rightarrow \mathrm{Cap}_{\beta,p}(E) = 0.$$

Лемма 1 известна при $p > 1$. Ее доказательство дословно переносится на случай $p > 0$.

Следующая лемма была доказана в [9] для операторов

$$\mathcal{S}_\alpha f(x) = \sup_{B \ni x} \frac{1}{r_B^\alpha} \fint_B |f - P_B f|\, d\mu,$$

где $P_B f : L^1_{\mathrm{loc}} \to L^1_{\mathrm{loc}}$. Там же есть замечание, что доказательство проходит в более общем случае, в том числе для операторов $\mathcal{A}_\alpha^{(p)}$.

Лемма 2. *Пусть $p > 0$, $0 \leqslant \beta < \alpha$, а мера μ и внешняя мера ν связаны условием*

$$\nu\left(B(x,t)\right) \leqslant ct^{-(\alpha-\beta)p}\mu(B(x,t)), x \in X, t \leqslant 1.$$

Тогда для $f \in L^p_{\mathrm{loc}}(X)$ и $R > 0$ справедливо

$$\|\mathcal{A}^{(p)}_{\beta,R} f\|_{L^p_\nu(X)} \lesssim \|\mathcal{A}^{(p)}_{\alpha,R} f\|_{L^p_\mu(X)}.$$

Лемма 3. *Пусть $f \in L^p(X)$, $p > 0$. B_1,B_2 — шары в X, причем $r_{B_1} < r_{B_2}$. Если $B_1 \subset B_2$,то*

$$\left|I^{(p)}_{B_1} f - I^{(p)}_{B_2} f\right| \lesssim A_p(f, B_1) + \left(\frac{r_{B_2}}{r_{B_1}}\right)^{\frac{\gamma}{p}} A_p(f, B_2).$$

Доказательство имеется в [10].

Лемма 4. *Для $f \in W^p_\alpha(X)$ и $g \in D^\alpha(f)$*

$$A_p(f, B(x,r)) \leqslant cr^\alpha \left(\fint_B g^p\, d\mu\right)^{1/p}.$$

Доказательство. Обозначим $B = B(x,r)$. Для любой точки $z \in X$ выполнено неравенство

$$\fint_B \left|f(y) - I_B^{(p)} f\right|^p d\mu(y) \leqslant \fint_B |f(y) - f(z)|^p \, d\mu(y).$$

Усредним его по всем $z \in B$, воспользуемся неравенством из определения класса W_α^p и известным неравенством $(a+b)^p \lesssim a^p + b^p$, $a > 0$, $b > 0$, $p > 0$. Получим

$$\fint_B \left|f(y) - I_B^{(p)} f\right|^p d\mu(y) \leqslant \fint_B \fint_B |f(y) - f(z)|^p \, d\mu(y)\, d\mu(z) \leqslant$$

$$\leqslant \fint_B \fint_B [d\,(x,y)]^{\alpha p} \, [g(x) + g(z)]^p \, d\mu(y)\, d\mu(z) \lesssim r^{\alpha p} \fint_B g^p.$$

□

Следующее неравенство слабого типа имеется, например, в [21, теорема 3.3].

Лемма 5. *Если $g \in L^1(X)$ и $0 < \beta < \gamma$, то*

$$H_\infty^{\gamma-\beta}\Big(\big\{x \in B(x,R) : M_{\beta,R}\, g(x) > \lambda\big\}\Big) \leqslant \frac{c}{\lambda} \int\limits_X |g|\, d\mu. \qquad (11)$$

Лемма 6. *Пусть $0 < p < \infty$, $g \in L^p(X)$, $g \geqslant 0$. Тогда $H_\infty^{\gamma-\alpha p}(E) = 0$, где*

$$E = \left\{ x \in X : \overline{\lim_{r\to 0}} r^{\alpha p} \fint_{B(x,r)} g^p \, d\mu > 0 \right\}.$$

Доказательство. В силу регулярности меры непрерывные функции плотны в $L^p(X)$, поэтому для любого $\varepsilon > 0$ можно записать $g = g_1 + g_2$, где $g_1 \in C(X)$ и $||g_2||_{L^p} < \varepsilon$.

Для $\lambda > 0$ введем обозначение

$$E_\lambda = \left\{ x \in X : \overline{\lim_{r\to 0}} r^{\alpha p} \fint_{B(x,r)} g^p \, d\mu > \lambda \right\} \subset$$

$$\subset \left\{ x \in X : \overline{\lim_{r\to 0}} r^{\alpha p} \fint_{B(x,r)} |g_2|^p \, d\mu > \lambda \right\}.$$

Последнее включение верно в силу

$$\left\{ x \in X : \overline{\lim_{r\to 0}} r^{\alpha p} \fint_{B(x,r)} |g_1|^p \, d\mu > \lambda \right\} = \varnothing.$$

Зафиксируем шар $B(y,n)$ и воспользуемся (11) с $\beta = \alpha p$.

$$H_\infty^{\gamma-\alpha p}\left(E_\lambda \cap B(y,n)\right) \leqslant \frac{c}{\lambda} \int_X |g_2|^p \, d\mu \leqslant \frac{c\varepsilon^p}{\lambda}.$$

В силу произвольности ε имеем $H_\infty^{\gamma-\alpha p}(E_\lambda \cap B(y,n)) = 0$. Отсюда следует, что $H_\infty^{\gamma-\alpha p}\left(E_\lambda\right) = 0$ для любого λ. Так как $E = \cup_{n=1}^\infty E_{\frac{1}{n}}$, то $H_\infty^{\gamma-\alpha p}(E) = 0$. □

Лемма 7. *Для* $f \in L^p_{\mathrm{loc}}$ *и любого* $B \subset X$ *справедливо неравенство типа Пуанкаре*

$$\left(\fint_B \left|f - I_B^{(p)} f\right|^q \, d\mu\right)^{\frac{1}{q}} \leqslant c r_B^{\alpha} \left(\fint_{2B} \left[\mathcal{A}_{\alpha}^{(p)} f\right]^p \, d\mu\right)^{\frac{1}{p}}$$

при $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{\alpha}{\gamma}$

Доказательство имеется в [10].

4 Точки Лебега

4.1 q-точки Лебега

Пусть $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(X)$. Тогда $x \in X$ называется точкой Лебега для функции f, если

$$\lim_{r \to +0} \fint_{B(x,r)} f \, d\mu = f(x). \tag{12}$$

Будем также говорить, что $x \in X$ является q-точкой Лебега, если

$$\lim_{r \to +0} \fint_{B(x,r)} |f - f(x)|^q \, d\mu = 0.$$

Очевидно, что при $q \geqslant 1$ каждая q-точка Лебега является также точкой Лебега. Кроме того, в силу неравенства Гельдера понятие q-точки Лебега тем сильнее, чем больше q.

Классическая теорема Лебега (см., например, [1, с. 4], а также [20, с. 4]) утверждает, что для любой функции $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ соотношение (12) выполнено почти всюду. Другими словами, исключительное множество точек, которые не являются точками Лебега, имеет меру нуль. Важность этого результата, в частности, состоит в том, что он дает естественное определение значений функции почти всюду.

Основная задача, которую мы рассматриваем в этой главе, состоит в исследовании зависимости массивности дополнения ко множеству точек Лебега от регулярности функции — можно ожидать, что если функция более регулярна, то это исключительное множество точек меньше в том или ином смысле.

В этом разделе мы перенесем известные при $p \geqslant 1$ результаты на пространства $W^p_\alpha(X)$ при $p > 0$. Мы покажем, что функция из $W^p_\alpha(X)$ почти всюду по соответствующей емкости имеет q-точки Лебега. При этом будет введено понятие новой точки Лебега.

Мы также оценим размерность Хаусдорфа дополнения ко множеству q-точек Лебега для $W^p_\alpha(X)$ и рассмотрим скорость сходимости чисел $I^{(p)}_B f$ к исходной функции.

4.2 Оценка массивности исключительного множества в терминах мер Хаусдорфа

Аналог следующей теоремы с классическими точками Лебега имеется при $p > 1$ в [13]. Существенно новым является случай $0 < p \leqslant 1$.

Теорема 1. *Пусть $\alpha > 0$, $0 < p < \frac{\gamma}{\alpha}$ и $f \in W^p_\alpha(X)$. Тогда существует такое множество $E \subset X$ такое, что $\dim_{\mathrm{H}} E \leqslant \gamma - \alpha p$ и предел*

$$\lim_{r\to+0} I^{(p)}_{B(x,r)} f = f^*(x)$$

существует для любого $x \in X \setminus E$. Более того,

$$\lim_{r\to+0} \fint_{B(x,r)} |f - f^*(x)|^q \, d\mu = 0, \ \frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{\alpha}{\gamma}.$$

Доказательство. Пусть $g \in D^\alpha(f) \cap L^p(X)$. Зафиксируем точку $x \in X$. Для любых $0 < r < R$ существует $n \in \mathbb{N}$ такое, что

$$2^{-(n+1)} r < R \leqslant 2^{-n} r.$$

Зафиксируем $\varepsilon > 0$ и воспользуемся неравенствами из лемм 3 и 4

$$\left| I^{(p)}_{B(x,r)} f - I^{(p)}_{B(x,R)} f \right| \leqslant \left| I^{(p)}_{B(x,r)} f - I^{(p)}_{B(x,2^{-(n+1)}r)} f \right| + \left| I^{(p)}_{B(x,2^{-(n+1)}r)} f - I^{(p)}_{B(x,R)} f \right| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{j=0}^{\infty} \left| I^{(p)}_{B(x,\frac{r}{2^j})} f - I^{(p)}_{B(x,\frac{r}{2^{j+1}})} f \right| + \left| I^{(p)}_{B(x,2^{-(n+1)}r)} f - I^{(p)}_{B(x,R)} f \right| \lesssim$$

$$\lesssim \sum_{j=0}^{\infty} A_p\left(f, B\left(x, \frac{r}{2^{j+1}}\right)\right) + 2^{\frac{\gamma}{p}} A_p\left(f, B\left(x, \frac{r}{2^j}\right)\right) +$$

$$+ A_p\left(f, B\left(x, 2^{-(n+1)} r\right)\right) + \left(\frac{R}{2^{-(n+1)} r}\right)^{\frac{\gamma}{p}} A_p\left(f, B\left(x, R\right)\right) \lesssim$$

$$\lesssim \sum_{j=0}^{\infty} \frac{r^\alpha}{2^{j\alpha}} \left(\fint_{B(x,\frac{r}{2^j})} g^p \, d\mu \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\fint_{B(x,R)} g^p \, d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \lesssim$$

$$\lesssim \left(r^{\varepsilon p} + R^{\varepsilon p}\right) \left(M_{(\alpha-\varepsilon)p,1} g^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

При $R \to +0$ правая часть неравенства будет стремиться к нулю в точках дополнения к множеству

$$E_1 = \left\{ x \in X : M_{(\alpha-\varepsilon)p,1} g^p(x) = \infty \right\}.$$

Значит, в силу критерия Коши, для любого $x \in X \setminus E_1$ существует предел

$$\lim_{r\to+0} I^{(p)}_{B(x,r)} f = f^*(x).$$

Оценим размерность Хаусдорфа множества E_1. Для этого зафиксируем $y \in X$ и $n \in \mathbb{N}$, а затем воспользуемся (11)

$$H^{\gamma-(\alpha-\varepsilon)p}_\infty \left(E_1 \cap B(y,n)\right) \leqslant H^{\gamma-(\alpha-\varepsilon)p}_\infty \left(\left\{ x \in B(y,n) : M_{(\alpha-\varepsilon)p,1} g^p(x) > \lambda \right\}\right) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{c}{\lambda}\int_X g^p\,d\mu.$$

Устремляя $\lambda \to +\infty$, получим, что $H_\infty^{\gamma-(\alpha-\varepsilon)p}(E_1 \cap B(y,n)) = 0$. Отсюда в силу произвольности ε и следует утверждение теоремы.

Перейдем теперь к доказательству второго утверждения теоремы. Так как $f \in W_\alpha^p(X)$, то $\mathcal{A}_\alpha^{(q)} f \in L^p(X)$ при $\frac{1}{q} > \frac{1}{p} - \frac{\alpha}{\gamma}$ (см. [10]). В частности, $\mathcal{A}_\alpha^{(p)} f \in L^p(X)$. Из леммы 7 следует, что

$$\lim_{r\to 0}\left(⨍_{B(x,r)}\left|f - I_B^{(p)} f\right|^q\,d\mu\right)^{\frac{1}{q}} \lesssim \lim_{r\to 0} r^\alpha \left(⨍_{B(x,2r)}\left[\mathcal{A}_\alpha^{(p)} f\right]^p\,d\mu\right)^{\frac{1}{p}} = 0$$

при $x \in X \setminus E_2$, где

$$E_2 = \left\{x \in X : \varlimsup_{r\to 0} r^{\alpha p} ⨍_{B(x,r)}\left[\mathcal{A}_\alpha^{(p)} f\right]^p\,d\mu > 0\right\}.$$

Рассмотрим теперь множество $E = E_1 \cup E_2$. Для любого $x \in X \setminus E$

$$\lim_{r\to +0} ⨍_{B(x,r)} |f - f^*(x)|^q\,d\mu \lesssim$$

$$\lesssim \lim_{r\to +0} ⨍_{B(x,r)}\left|f - I_{B(x,r)}^{(p)}\right|^q d\mu + \lim_{r\to +0}\left|I_{B(x,r)}^{(p)} - f^*(x)\right| = 0.$$

Оценим размерность Хаусдорфа множества E_2 с помощью леммы (6), получим $\dim_{\mathrm{H}}(E_2) \leqslant \gamma - \alpha p$. Такое же неравенство выполнено и для размерности множества E. $\square$

Теорема 1 показывает, что элементы наилучшего приближения $I_B^{(p)} f$ могут служить адекватной заменой интегральным средним в случае, когда последние не существуют (при $0 < p < 1$). Таким образом, естественно следующее определение: $x \in X$ — новая точка Лебега для функции $f \in W_\alpha^p(X)$, если выполнено

$$\lim_{r\to +0} I_{B(x,r)}^{(p)} f = f(x).$$

4.3 Оценка массивности исключительного множества в терминах емкостей

Теорема 2. *Пусть $f \in W_\alpha^p(X)$, $0 < \alpha \leqslant 1$, $p > 0$ тогда*

$$\mathrm{Cap}_{\alpha,p}\left\{x : \lim_{r\to 0} I_{B(x,r)}^{(p)} f(x) \text{ не существует}\right\} = 0$$

Доказательство. Применим лемму 2 с $\nu = \mathrm{Cap}_{\alpha,p}$ и $\beta = 0$. Заметим, что условие

$$\nu\left(B(x,t)\right) \leqslant c t^{-(\alpha-\beta)p}\mu(B(x,t)), x \in X$$

выполнено в силу свойства 2) леммы 1. Имеем

$$\|\mathcal{A}_{0,R}^{(p)} f\|_{L^p_\nu(X)}^p = p\int_0^\infty \lambda^{p-1}\mathrm{Cap}_{\alpha,p}\left\{\mathcal{A}_{0,R}^{(p)} f > \lambda\right\}\,d\lambda \lesssim$$

$$\lesssim \|\mathcal{A}_{\alpha,R}^{(p)} f\|_{L^p_\mu(X)}^p < \infty \tag{13}$$

Доказательство того, что $\|\mathcal{A}_{\alpha,R}^{(p)} f\|_{L^p_\mu(X)} < \infty$ при $f \in W^p_\alpha(X)$ можно найти в [10]. Из (13) следует, что

$$\mathrm{Cap}_{\alpha,p}\left\{\mathcal{A}_{0,R}^{(p)} f = \infty\right\} = 0. \tag{14}$$

Далее действуем так же, как и при доказательстве теоремы 1. Зафиксируем точку $x \in X$ и $\varepsilon > 0$. Для любых $0 < r < R$ существует $n \in \mathbb{N}$ такое, что

$$2^{-(n+1)}r < R \leqslant 2^{-n}r.$$

Используя неравенство треугольника и лемму 3, запишем

$$\left|I^{(p)}_{B(x,r)}f - I^{(p)}_{B(x,R)}f\right| \leqslant$$

$$\leqslant \left|I^{(p)}_{B(x,r)}f - I^{(p)}_{B(x,2^{-(n+1)}r)}f\right| + \left|I^{(p)}_{B(x,2^{-(n+1)}r)}f - I^{(p)}_{B(x,R)}f\right| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{j=0}^{\infty}\left|I^{(p)}_{B(x,\frac{r}{2^j})}f - I^{(p)}_{B(x,\frac{r}{2^{j+1}})}f\right| + \left|I^{(p)}_{B(x,2^{-(n+1)}r)}f - I^{(p)}_{B(x,R)}f\right| \lesssim$$

$$\lesssim \sum_{j=0}^{\infty} A_p\left(f, B\left(x, \frac{r}{2^j}\right)\right) + \left(\frac{R}{2^{-(n+1)}r}\right)^{\frac{\gamma}{p}} A_p\left(f, B\left(x, R\right)\right) \lesssim$$

$$\lesssim \sum_{j=0}^{\infty}\frac{r^\alpha}{2^{j\alpha}}\mathcal{A}^{(p)}_\alpha f(x) + R^\alpha \mathcal{A}^{(p)}_\alpha f(x) \lesssim$$

$$\lesssim \left(r^\alpha + R^\alpha\right)\mathcal{A}^{(p)}_\alpha f(x).$$

При $R \to +0$ правая часть неравенства будет стремиться к нулю в точках дополнения к множеству

$$E = \left\{x \in X : \mathcal{A}^{(p)}_\alpha f(x) = \infty\right\}.$$

Значит, в силу критерия Коши, для любого $x \in X \setminus E$ существует предел $\lim_{r\to 0} I^{(p)}_{B(x,r)} f(x)$. Учитывая (14), получаем утверждение леммы. □

4.4 Точки Лебега со скоростью

Оказывается, $I_B^{(p)}$-средние могут сходится к $f(x)$ с определённой скоростью, но, возможно, на множестве, имеющем большую размерность Хаусдорфа. Точный смысл этого утверждения показывает следующая теорема.

Теорема 3. *Пусть* $\alpha > 0$, $0 < p < \frac{\gamma}{\alpha}$, $0 < \beta < \alpha$. *Тогда для любой функции* $f \in W_\alpha^p$ *существует множество* $E \subset X$ *такое, что* $H_\infty^{\gamma-(\alpha-\beta)p}(E) = 0$, *в частности* $\dim_{\mathrm{H}} E \leqslant \gamma - (\alpha - \beta)\,p$. *Кроме того, для всех* $x \in X \setminus E$

$$\lim_{r\to+0} r^{-\beta} \fint_{B(x,r)} |f - f(x)|^q \, d\mu = 0, \ \frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{\alpha}{\gamma}.$$

Доказательство. Пусть E_1 — дополнение к множеству точек $x \in X$, для которых выполнено соотношение

$$\lim_{r\to+0} \left[f(x) - I_{B(x,r)}^{(p)} f \right] = 0. \tag{15}$$

Из теоремы 1 следует, что $H^{\gamma-(\alpha-\beta)p}(E_1) = 0$.

Пусть $x \in X \setminus E_1$, $0 < r < 1$, $B_j = B(x, 2^{-j} r)$. Применяя лемму 3 и используя неравенство

$$A_p(f, B) \leqslant r_B^\alpha \left(\fint_B \left[\mathcal{A}_\alpha^{(p)} f \right]^p d\mu \right)^{1/p},$$

получаем

$$r^{-\beta} \left| f - I_B^{(p)} f \right| \leqslant r^{-\beta} \sum_{j=0}^\infty \left| I_{B_{j+1}}^{(p)} f - I_{B_j}^{(p)} f \right| \leqslant$$

$$\leqslant c r^{-\beta} \sum_{j=0}^\infty \left(A_p(f, B_{j+1}) + 2^{\frac{\gamma}{p}} A_p(f, B_j) \right) \leqslant c r^{-\beta} \sum_{j=0}^\infty A_p(f, B_j) \leqslant$$

$$\leqslant c r^{\alpha-\beta} \sum_{j=0}^\infty 2^{-j\alpha} \left(\fint_{B_j} \left[\mathcal{A}_\alpha^{(p)} f \right]^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \leqslant c \sup_{t<r} \left(t^{(\alpha-\beta)p} \fint_{B(x,t)} \left[\mathcal{A}_\alpha^{(p)} f \right]^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}},$$

и правая часть сходится к 0 при $r \to +0$, если

$$\lim_{r\to+0} r^{(\alpha-\beta)p} \fint_{B(x,r)} \left[\mathcal{A}_\alpha^{(p)} f \right]^p d\mu = 0.$$

В силу леммы 6, примененной к $g = \mathcal{A}_\alpha^{(p)} f$, получаем, что $H^{\gamma-(\alpha-\beta)p}(E_2) = 0$, где

$$E_2 = \left\{ x \in X : \overline{\lim_{r\to+0}} r^{(\alpha-\beta)p} \fint_{B(x,r)} \left[\mathcal{A}_\alpha^{(p)} f \right]^p d\mu > 0 \right\}.$$

Итак, на дополнении к множеству $E = E_1 \cup E_2$ выполнено соотношение 15, а из леммы 7

$$r^{-\beta}\left(\fint_{B(x,r)} \left|f - I^{(p)}_{B(x,r)} f\right|^q \, d\mu\right)^{\frac{1}{q}} \leqslant c\left(r^{(\alpha-\beta)p}\fint_{B(x,2r)} \left[\mathcal{A}^{(p)}_{\alpha} f\right]^p \, d\mu\right)^{\frac{1}{p}},$$

и для $x \in X \setminus E_2$ правая часть сходится к 0 при $r \to +0$.

Следовательно, для любого $x \in X \setminus E$

$$\varlimsup_{r\to+0} r^{-\beta}\left(\fint_{B(x,r)} |f - f(x)|^q \, d\mu\right)^{\frac{1}{q}} \lesssim \lim_{r\to+0} r^{-\beta}\left|f(x) - I^{(p)}_{B(x,r)} f\right| +$$

$$+\lim_{r\to+0} r^{-\beta}\left(\fint_{B(x,r)} \left|f - I^{(p)}_{B(x,r)}\right|^q \, d\mu\right)^{\frac{1}{q}} = 0.$$

□

Заметим, что при $p \geqslant \frac{\gamma}{\gamma+\alpha}$ будет выполнено условие $q \geqslant 1$, и поэтому можно повторить доказательство этой теоремы для множества E, на дополнении к которому выполнено более сильное условие

$$\lim_{r\to+0} r^{-\beta}\left(\fint_{B(x,r)} \left|f - f_{B(x,r)}\right|^q \, d\mu\right)^{\frac{1}{q}} = 0.$$

В этом случае мы уже имеем право писать среднее интегральное $f_{B(x,r)}$, так как $f \in L^q_{\mathrm{loc}} \subset L^1_{\mathrm{loc}}$.

Заключение

Дипломная работа посвящена изучению тонких свойств функций из классов Хайлаша–Соболева на произвольных метрических пространствах с мерой, удовлетворяющей условию удвоения. Исследовано понятие новых точек Лебега (для несуммируемых функций), получены следующие результаты.

1. Оценка массивности исключительного множества в терминах мер Хаусдорфа.

2. Оценка массивности исключительного множества в терминах емкостей.

3. Исследовано влияние скорости сходимости элементов наилучшего приближения $I_B^{(p)}f$, которые служат заменой средним интегральным, на «размер» исключительного множества.

Список литературы

[1] Стейн И. Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций. М.: Мир. 1973.

[2] Соболев С.Л. Некоторые применения функционального анализа в математической физике Москва: Наука, 1988. — 336 с.

[3] Соболев С.Л. Об одной теореме функционального анализа // Математический сборник. 1938. Т.4, № 46. С. 471–497.

[4] Бесов, О.В. Интегральные представления функций и теоремы вложения Москва: Наука, 1975. — 480 с.

[5] Богачев, В.И. Основы теории меры: в 2 т. Москва, Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2003. Т. 1.

[6] Богачев, В.И. Основы теории меры: в 2 т. Москва, Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2003. Т. 2.

[7] Данфорд, Н. Линейные операторы: в 3 т. Москва: Издательство иностранной литературы, 1962. Т. 1: Общая теория.

[8] Карлесон, Л. Избранные проблемы теории исключительных множеств Москва: Мир, 1971. 126 с.

[9] Кротов, В.Г. Весовые L^p-неравенства для шарп-максимальных функций на метрических пространствах с мерой // Известия НАН Армении. Математика. 2006. Т. 41, № 2. С. 25–42.

[10] В.Г. Кротов, А.И. Порабкович Оценки L^p–осцилляций функций при $p > 0$ // Математические заметки. 2015. Т. 97, № 3. С. 407–420

[11] Мазья, В.Г. Пространства Соболева Ленинград: Издательство Ленинградского университета, 1985. 416 с.

[12] Никольский, С.М. Приближение функций многих переменных и теоремы вложения Москва: Наука, 1977. 456 с.

[13] Прохорович, М.А. Меры Хаусдорфа и точки Лебега для классов Соболева W^p_α, $\alpha > 0$, на пространствах однородного типа. // Математические заметки. 2009. Т. 85. №4 С. 616–621

[14] R.R. Coifman, G. Weiss Extensions of Hardy spaces and their use in analysis // Bulletin Of The American Mathematical Society. 1977. Vol. 83, № 4. P. 569–645.

[15] R.R. Coifman, G. Weiss. Lecture Notes in Mathematics: Analyse harmonique non-commutative sur certain espaces homogenes Berlin, Heidelberg, New York: Springer–Verlag, 1971. 160 p.

[16] Hajłasz, P. Sobolev spaces on an arbitrary metric spaces // Potential Analysis. 1996. Vol. 5, № 4. P. 403–415.

[17] Heinonen, J. Quasiconformal maps in metric spaces with controlled geometry // Acta Mathematica. 1998. Vol. 181. P. 1–61.

[18] Hu, J. A note on Hajłasz—Sobolev spaces on fractals // Journal of mathematical analysis and applications. 2003. Vol. 280, № 1. P. 91–101.

[19] Hajłasz P., Koskela P. Sobolev met Poincaré // Memoirs of the American Mathematical Society. 2000. Vol. 145. P. 1–115.

[20] Heinonen, J. Lectures on Analysis on Metric Spaces / J. Heinonen. — Berlin: Springer–Verlag, 2001. — 141 p.

[21] Stein, E.M. Harmonic Analysis: Real Variable Methods, Orthogonality and Oscillatory Integrals E.M. Stein. Princeton: Princeton University Press, 1993. 695 p.

[22] H. Triebel. Theory of Function Spaces III Basel, Boston, Berlin: Birkhäuser Verlag, 2006. 432 p.

[23] Calderón, A.P. Estimates for singular integral operators in terms of maximal functions // Studia Mathematica. 1972. Vol. 44. P. 561–582.

[24] Yang, D. New characterization of Hajłasz-Sobolev spaces on metric spaces // Science in China (series A). 2003. Vol. 46, № 5. P. 675–689.

[25] Federer H., Ziemer W. The Lebesgue sets of a function whose distribution derivatives are p-th power summable // Indiana University Mathematics Journal. 1972. Vol. 22, № 2. P. 139–158.

[26] C.P. Calderón, E.B. Fabes , N.M. Riviere Maximal smoothing operators // Indiana University Mathematics Journal. 1974. Vol. 23. P. 889–898.

[27] Meyers, N.G. Taylor expansion of Bessel potentials // Indiana University Mathematics Journal. 1974. Vol. 23. P. 1043–1049.

[28] Bagby, T. Pointwise differentiability and absolute continuity / T.Bagby, W.P. Ziemer // Transactions of the American Mathematical Society. 1974. Vol. 191. P. 129–148.