УДК 517.977

ХА ВО ТХИ ТАНЬ (ВЬЕТНАМ)

МЕТОД УПРАВЛЕНИЯ В РЕАЛЬНОМ ВРЕМЕНИ ЛИНЕЙНОЙ НЕСТАЦИОНАРНОЙ СИСТЕМОЙ С ПОМОЩЬЮ ИМПУЛЬСНЫХ УПРАВЛЯЮЩИХ ВОЗДЕЙСТВИЙ

Рассматривается линейная задача оптимального управления в реальном времени в классе многомерных импульсных управляющих воздействий. Вводятся понятия импульсного управляющего воздействия, программного и позиционного решений задачи. Основное внимание уделяется позиционному решению. Классические методы (принцип максимума, динамическое программирование) построения позиционного решения основаны на его представлении в аналитической и табличной формах, что осуществляется до начала процесса управления и связано с большими вычислительными трудностями, известными как «проклятие размерности». При этом в процессе управления никакая существенная работа не выполняется. Цель статьи – изложение метода реализации позиционного решения с помощью принципа управления в реальном времени, при котором большая часть работы выполняется в процессе управления в режиме реального времени. В основе предлагаемого метода лежит специальный двойственный метод линейного программирования (ЛП), с помощью которого осуществляется быстрая коррекция основного элемента метода – опоры. Приводятся приемы ускорения вычислений. В случае стационарных динамических систем ускорение достигается с помощью рекуррентных уравнений, распараллеливания вычислений и метода «разновесов».

Ключевые слова: импульсное управляющее воздействие; стационарный, нестационарный объекты; программное, позиционное решения; оптимальное управление в реальном времени; распараллеливание вычислений.

In the class of multidimensional impulse control actions a linear optimal online control problem is considered. Concepts of impulse control actions, program and positional solutions are introduced. The positional solutions are the main goal of investigation. The classical methods of positional solutions (maximum principle, dynamical programming) are based on representation them in analytical and tabular forms. This is executed before the control process starting and is encountered, as a rule, «the curse of dimensionality». In the control process no work is fulfilled. In the paper the method of implementing positional solutions by online control principle is given at which the basic work is fulfilled online in the course of control processes. On the base of the special dual method of linear programming (LP) a method of optimal online control is justified which make possible to realize fast correcting the support (the main element of the method of the problem under consideration). Acceleration methods of calculations are given. In the case of stationary dynamical systems acceleration computing is achieved by the recurrent equations, parallel computing and the «set of weights» method.

Key words: impulse control action; stationary, nonstationary objects; program and positional solutions; optimal online control; parallelizing of algorithms.

Постановка задачи. Программное и позиционное решения

Пусть $T=\left[t_*, t^*\right[$ – конечный промежуток времени; $h=\left(t^*-t_*\right)/N$ – период квантования; $N>1$ – натуральное число; $T_h=\left\{t_*,\ t_*+h, ..., t^*-h\right\}$; $T_h(\tau)=\left\{\tau,\ \tau+h, ..., t^*-h\right\}$, $\tau\in T_h$; $T(\tau)=\left[\tau, t^*\right[$; $\delta(t), t\in R$, – δ-функция Дирака; $J=\{1,2,...,r\}$; $V=\left\{v\in R^r:\ v_*\le v\le v^*\right\}$; $A(t)\in R^{n\times n}$, $t\in T$, – кусочно-непрерывная функция; $B(t)\in R^{n\times r}$, $t\in T$, – непрерывная функция; $c\in R^n$; $g_*, g^*\in R^m$; $X^*=\left\{x\in R^n: g_*\le Hx\le g^*\right\}$; $x_0\in R^n$; $A\in R^{n\times n}$, $B\in R^{n\times r}$, $H\in R^{m\times n}$ – постоянные матрицы; $h_{(i)}\in R^n$ – i-я строка матрицы H; $A_h=\exp(Ah)$; $A_{-h}=\exp(-Ah)$; $x(\vartheta)\overset{\Delta}{=}x(\vartheta-0)$.

Определение 1. Функция $u(t)\in R^r$, $t\in T$, называется *импульсным управляющим воздействием* (с периодом квантования h), если

$$u(t)=\sum_{\vartheta\in T_h}\delta(t-\vartheta)v(\vartheta),\ \ t\in T. \tag{1}$$

Траектория $x(t)$, $t\in T$, системы управления

$$\dot{x}=A(t)x+B(t)u,\ \ x(t_*)=x_0, \tag{2}$$

при импульсном управляющем воздействии обладает свойствами

$$x(\vartheta+h)=F(\vartheta+h)F^{-1}(\vartheta)x(\vartheta+0),$$
$$x(\vartheta+0)=x(\vartheta)+B(\vartheta)v(\vartheta),\ \ \vartheta\in T_h, \tag{3}$$

где $F(t)$, $t\in T$, – фундаментальная матрица решений однородной части уравнения (2) $\left(\dot{F}=A(t)F, F(t_*)=E\right)$.

Исключив из соотношений (3) векторы $x(\vartheta+0)$, $\vartheta\in T_h$, получим рекуррентное уравнение и формулу Коши

$$x(\tau+h)=F(\tau+h)F^{-1}(\tau)x(\tau)+F(\tau+h)F^{-1}(\tau)B(\tau)v(\tau),$$
$$x(\tau)=F(\tau)F^{-1}(t_*)x_0+\sum_{\vartheta=t_*}^{\tau-h}F(\tau)F^{-1}(\vartheta)B(\vartheta)v(\vartheta),\ \ \tau\in T_h. \tag{4}$$

В классе импульсных управляющих воздействий $u(t)$, $t\in T$, рассмотрим линейную задачу оптимального управления динамическим объектом:

$$c'x\left(t^*\right)\to\max;$$
$$\dot{x}=A(t)x+B(t)u,\ \ x(t_*)=x_0;\ \ x\left(t^*\right)\in X^*; \tag{5}$$
$$u(t)=\sum_{\vartheta\in T_h}\delta(t-\vartheta)v(\vartheta), t\in T; v(\vartheta)\in V, \vartheta\in T_h.$$

Определение 2. Импульсное управляющее воздействие $u(t)$, $t\in T$, назовем *доступным*, если $u(t)=\sum_{\vartheta\in T_h}\delta(t-\vartheta)v(\vartheta)$, $v(\vartheta)\in V$, $\vartheta\in T_h$.

Каждому доступному управляющему воздействию соответствуют единственные траектория $x(t)$, $t\in T$, и выходной сигнал $z=Hx\left(t^*\right)$ системы управления (5).

Определение 3. Доступное управляющее воздействие $u(t)$, $t\in T$, будем называть *импульсной программой*, если $x\left(t^*\right)\in X^*$.

Определение 4. Импульсная программа $u^0(t)$, $t\in T$, называется *импульсной оптимальной* (*импульсным программным решением* задачи (5)), если на соответствующей ей (оптимальной) траектории $x^0(t)$, $t\in T$, выполняется равенство

$$c'x^0\left(t^*\right)=\max_u c'x\left(t^*\right).$$

С помощью формулы Коши (4) задача (5) сводится к интервальной задаче ЛП

$$\sum_{\vartheta \in T_h} c'_h(\vartheta)v(\vartheta) \to \max;\ \tilde{g}_* \le \sum_{\vartheta \in T_h} D_h(\vartheta)v(\vartheta) \le \tilde{g}^*;\ v(\vartheta) \in V,\ \vartheta \in T_h,$$

где $c'_h(\vartheta) = c'F\left(t^*\right)F^{-1}(\vartheta)B(\vartheta),\ D_h(\vartheta) = HF\left(t^*\right)F^{-1}(\vartheta)B(\vartheta),\ \vartheta \in T_h;\ \tilde{g}_* = g_* - HF\left(t^*\right)F^{-1}\left(t_*\right)x_0;\quad \tilde{g}^* = g^* -$ $- HF\left(t^*\right)F^{-1}\left(t_*\right)x_0.$

Для определения позиционного решения задачи (5) предположим, что в процессе управления в каждый момент $\tau \in T_h$ будет известно текущее состояние $x^*(\tau)$ объекта. Погрузим задачу (5) в семейство задач

$$\begin{gathered} c'x\left(t^*\right) \to \max; \\ \dot{x} = A(t)x + B(t)u,\ x(\tau) = y,\ x\left(t^*\right) \in X^*; \\ u(t) = \sum_{\vartheta \in T_h(\tau)} \delta(t-\vartheta)v(\vartheta),\ t \in T(\tau);\ \ v(\vartheta) \in V,\ \ \vartheta \in T_h(\tau), \end{gathered} \tag{6}$$

зависящее от позиции $(\tau \in T_h,\ y \in R^n)$.

Поскольку импульсная функция (1) полностью определяется функцией $v(\vartheta),\ \ \vartheta \in T_h,$ дискретного аргумента, то впредь в определениях 1–4 будем использовать функцию $v(\vartheta),\ \ \vartheta \in T_h,$ опуская слово «импульсная».

Пусть $v^0(\vartheta \mid \tau, y), \vartheta \in T_h(\tau),$ – оптимальная программа задачи (6) для позиции $(\tau, y);$ X_τ – множество состояний y, для которых существует оптимальная программа $v^0(\vartheta \mid \tau, y), \vartheta \in T_h(\tau).$

Определение 5. Функция

$$v^0(\tau, y) = v^0(\tau \mid \tau, y),\ y \in X_\tau,\ \tau \in T_h, \tag{7}$$

называется оптимальной обратной связью или позиционным решением исходной задачи (5).

Задача (6) эквивалентна интервальной задаче ЛП:

$$\sum_{\vartheta \in T_h(\tau)} c'_h(\vartheta)v(\vartheta) \to \max;\ \tilde{g}_*(\tau) \le \sum_{\vartheta \in T_h(\tau)} D_h(\vartheta)v(\vartheta) \le \tilde{g}^*(\tau);\ v(\vartheta) \in V,\ \vartheta \in T_h(\tau), \tag{8}$$

где

$$\tilde{g}_*(\tau) = g_* - HF\left(t^*\right)F^{-1}(\tau)y,\ \ \tilde{g}^*(\tau) = g^* - HF\left(t^*\right)F^{-1}(\tau)y.$$

Методы реализации позиционного решения

В классической теории оптимального управления [1, 2] используются два метода реализации позиционного решения: 1) построение функции (7) в явном виде, 2) табулирование ее с необходимой точностью. Оба метода реализуемы только для простейших задач оптимального управления. Опишем метод реализации позиционного решения (7) с помощью управления в реальном времени.

При известной функции (7) процесс управления начинается с подачи на вход объекта управляющего воздействия $u^*(t) = \delta\left(t - t_*\right)v^0\left(t_*, x_0\right),\ t \ge t_*.$ При этом время поиска $s(t_*)$ значения $v^0\left(t_*, x_0\right)$ равно нулю. В момент $t_* + h$ становится известным состояние $x^*(t_* + h)$ объекта управления, для которого за время $s(t_* + h)$ находится значение $v^0\left(t_* + h, x^*\left(t_* + h\right)\right).$ В момент $t_* + h + s(t_* + h)$ на вход объекта управления поступает управляющее воздействие $u^*(t) = \delta(t - t_* - h)v^0\left(t_* + h, x^*\left(t_* + h\right)\right), t \ge t_* + h + s(t_* + h).$ Продолжая процесс управления, получаем последовательность

$$v^0\left(\tau, x^*(\tau)\right), \tau \in T_h, \tag{9}$$

которая называется реализацией позиционного решения (7) в конкретном процессе управления. Если для каждого момента $\tau \in T_h$ время поиска $s(\tau)$ значения $v^0\left(\tau, x^*(\tau)\right)$ удовлетворяет неравенствам $0 \le s(\tau) < h,\ \ \tau \in T_h,$ то можно говорить, что управление ведется в режиме реального времени.

Далее опишем методы построения в реальном времени реализации (9) позиционного решения (7) без знания функции (7). Они основаны на специальном двойственном методе ЛП [3] и на распараллеливании вычислений. Приведем основные элементы используемого двойственного метода.

Двойственный метод решения задачи ЛП (5)

Основным понятием используемого метода является *опора*. Из множеств $I,\ \ S = J \times T_h$ выделяются подмножества $I_{\text{оп}} \subseteq I,\ \ S_{\text{оп}} \subseteq S$ с одинаковым количеством элементов $\left|I_{\text{оп}}\right| = \left|S_{\text{оп}}\right|$. Составляется матрица

$$D_{\text{оп}} = \begin{pmatrix} d_{ij}(\vartheta), & \{j, \vartheta\} \in S_{\text{оп}} \\ i \in I_{\text{оп}} & \end{pmatrix}.$$

Пара $K_{оп} = \{I_{оп}, S_{оп}\}$ – опора задачи (5), если $\det D_{оп} \neq 0$. В случае $I_{оп} = \varnothing$, $S_{оп} = \varnothing$ пустое множество $K_{оп} = \varnothing$ – (пустая) опора, по определению. Опору сопровождают:

1) вектор Лагранжа $\nu = (\nu_i, i \in I): \nu_i = 0,\ i \in I_н = I \setminus I_{оп};\ \nu'_{оп} D_{оп} = c'_{оп},\ \nu_{оп} = (\nu_i, i \in I_{оп}),\ c_{оп} = (c_{hj}(\vartheta), \{j, \vartheta\} \in S_{оп})$. Если $K_{оп} = \varnothing$, то $\nu_{оп} = 0$;

2) копрограмма $\delta_h = (\delta_{hj}(\vartheta), \{j, \vartheta\} \in S)$: $\delta_h(\vartheta) = (c' - \nu' H) F(t^*) F^{-1}(\vartheta) B(\vartheta), \vartheta \in T_h$, $\delta_h(\vartheta) = (\delta_{hj}(\vartheta), j \in J)$.

Опора называется регулярной, если $\nu_i \neq 0, i \in I_{оп}; \delta_{hj}(\vartheta) \neq 0, \{j, \vartheta\} \in S_н = S \setminus S_{оп}$.

Будем считать, что задача (5) не вырождена, т. е. все ее опоры регулярны;

3) псевдопрограмма $\omega(t) = \sum\limits_{\vartheta \in T_h} \delta(t - \vartheta)\xi(\vartheta),\ t \in T,$ и выходной псевдосигнал $\zeta \in R^m$:

$$\zeta_i = g_{*i}, \text{ если } \nu_i < 0;\ \zeta_i = g_i^*, \text{ если } \nu_i > 0,\ i \in I_{оп};$$

$$\xi_j(\vartheta) = v_{*j}, \text{ если } \delta_{hj}(\vartheta) < 0;\ \xi_j(\vartheta) = v_j^*, \text{ если } \delta_{hj}(\vartheta) > 0,\ \{j, \vartheta\} \in S_н;$$

совокупности $\xi_{оп} = (\xi_j(\vartheta), \{j, \vartheta\} \in S_{оп})$, $\zeta_н = (\zeta_i, i \in I_н)$ находятся по формулам

$$\xi_{оп} = D_{оп}^{-1}\left(\zeta_{оп} - H_{оп}æ_0(t^*)\right);\ \zeta_i = h'_{(i)}æ(t^*),\ i \in I_н,$$

где $H_{оп} = (h_{(i)}, i \in I_{оп})$; $æ_0(t^*)$ – состояние системы (2) в момент t^* при управляющем воздействии $u(t) = \omega(t), t \in T;\ \xi_j(\vartheta) = 0,\ \{j, \vartheta\} \in S_{оп}$; $æ(t^*)$ – состояние системы (2) в момент t^* при $u(t) = \omega(t), t \in T$.

Определение 6. Опора $K^0_{оп} = \{I^0_{оп}, S^0_{оп}\}$ называется *оптимальной*, если мера ее неоптимальности [3] равна нулю.

Критерий оптимальности опоры. Для оптимальности опоры $K^0_{оп} = \{I^0_{оп}, S^0_{оп}\}$ необходимо и достаточно, чтобы для сопровождающих ее элементов выполнялись неравенства

$$v_{*j} \le \xi^0_j(\vartheta) \le v^*_j, \{j, \vartheta\} \in S^0_{оп};\ g_{*i} \le \zeta^0_i \le g^*_i,\ i \in I^0_н.$$

Решение задачи (5) начинается с произвольной опоры (возможно, пустой) $K_{оп}$. Если на ней критерий оптимальности опоры выполняется, то сопровождающая опору $K^0_{оп}$ псевдопрограмма $\omega^0(t), t \in T$, является оптимальной программой задачи (5): $u^0(t) = \omega^0(t), t \in T$. В противном случае старая опора $K_{оп}$ заменяется на новую $\bar{K}_{оп}$ следующим образом.

Вычисляется $\alpha^1 = -\max\{\rho_{i_0}, \rho(j_0, \vartheta_0)\}$, где $\rho_{i_0} = \max \rho(\zeta_i, [g_{*i}, g^*_i]), i \in I_н$; $\rho(j_0, \vartheta_0) = \max \rho(\xi_j(\vartheta), [v_{*j}, v^*_j]), \{j, \vartheta\} \in S_{оп}$; $\rho(\gamma, [\alpha, \beta])$ – расстояние от γ до отрезка $[\alpha, \beta]$.

Если $\alpha^1 = 0$, то критерий оптимальности опоры выполняется и $K^0_{оп} = K_{оп}$ – оптимальная опора задачи (5). При $\alpha^1 < 0$ опора $K_{оп}$ заменяется на новую $\bar{K}_{оп}$. Для этого строятся направление $\Delta\nu$ изменения вектора Лагранжа и направление $\Delta\delta_h$ изменения копрограммы. Возможны два случая: 1) $\alpha^1 = -\rho_{i_0}$; 2) $\alpha^1 = -\rho(j_0, \vartheta_0)$.

В первом случае полагается $\Delta\nu_{i_0} = \operatorname{sign}(\zeta_{i_0} - g_{*i})$, $\Delta\nu_i = 0, i \in I_н \setminus i_0$; $\Delta\nu'_{оп} D_{оп} = -\Delta\nu_{i_0} D(i_0, S_{оп})$; $\Delta\delta_{оп} = 0$; $\Delta\delta_н = -\Delta\nu' D(I, S_н)$.

Во втором случае полагается $\Delta\delta_{hj_0}(\vartheta_0) = \operatorname{sign}(\xi_{j_0}(\vartheta_0) - v_{*j_0})$, $\Delta\delta_{hj}(\vartheta) = 0, \{j, \vartheta\} \in S_{оп} \setminus \{j_0, \vartheta_0\}$; $\Delta\nu_н = 0$; $\Delta\nu'_{оп} D_{оп} = -\Delta\delta'_{оп}$; $\Delta\delta'_н = -\Delta\nu'_{оп} D(I_{оп}, S_н)$.

Вычисляются шаги

$$\sigma_i = -\nu_i / \Delta\nu_i \text{ при } \nu_i\Delta\nu_i < 0;\ \sigma_i = \infty \text{ при } \nu_i\Delta\nu_i \ge 0,\ i \in I_{оп};$$

$$\sigma_j(\vartheta) = -\delta_{hj}(\vartheta) / \Delta\delta_{hj}(\vartheta) \text{ при } \delta_{hj}(\vartheta)\Delta\delta_{hj}(\vartheta) < 0;\ \sigma_j(\vartheta) = \infty \text{ при } \delta_{hj}(\vartheta)\Delta\delta_{hj}(\vartheta) \ge 0,\ \{j, \vartheta\} \in S_н. \quad (10)$$

Если среди этих чисел нет конечных, то решение задачи (5) прекращается из-за несовместности ограничений. В противном случае конечные числа из (10) упорядочиваются: $\sigma^1 < \sigma^2 < \ldots < \sigma^{k_*} < \infty$. Находится такой индекс k_0, что $\alpha^{k_0} < 0$, $\alpha^{k_0+1} \ge 0$. Здесь $\alpha^{k+1} = \alpha^k + \Delta\alpha^k$; $\Delta\alpha^k = (g^*_{i_k} - g_{*i_k})|\Delta\nu_{i_k}|$ при $\sigma^k = \sigma_{i_k}$; $\Delta\alpha^k = (v^*_{j_k} - v_{*j_k})|\Delta\delta_{hj_k}(\vartheta_k)|$ при $\sigma^k = \sigma_{j_k}(\vartheta_k)$.

Имеются две возможности: а) $\sigma^{k_0} = \sigma_{i_*}$; б) $\sigma^{k_0} = \sigma_{j_*}(\vartheta_*)$.

Компоненты новой опоры $\bar{K}_{оп} = \{\bar{I}_{оп}, \bar{S}_{оп}\}$ имеют вид: 1а) $\bar{I}_{оп} = (I_{оп} \setminus i_*) \cup i_0$, $\bar{S}_{оп} = S_{оп}$; 1б) $\bar{I}_{оп} = I_{оп} \cup i_0$, $\bar{S}_{оп} = S_{оп} \cup \{j_*, \vartheta_*\}$; 2а) $\bar{I}_{оп} = I_{оп} \setminus i_*$, $\bar{S}_{оп} = S_{оп} \setminus \{j_0, \vartheta_0\}$; 2б) $\bar{I}_{оп} = I_{оп}$, $\bar{S}_{оп} = (S_{оп} \setminus \{j_0, \vartheta_0\}) \cup \{j_*, \vartheta_*\}$.

Можно доказать, что для невырожденных задач предлагаемый метод конечен. Обобщение метода на вырожденные задачи приведено в [3].

Управление в реальном времени

Управление в реальном времени осуществляется следующим образом. До начала процесса управления решается задача (8) для $\tau = t_*,\ y = x_0$. При этом или обнаруживается, что задача (6) не имеет решений, или строится оптимальная программа $v^0\left(\vartheta \mid t_*, x_0\right), t \in T_h(t_*)$. Пусть задача (8) для позиции $\left(t_*, x_0\right)$ имеет решение. Для позиции $\left(t_*, x_0\right)$ формируется и запоминается начальная информация $O(t_*) = \left\{K^0_{\text{оп}}\left(t_*\right) = \left\{I^0_{\text{оп}}\left(t_*\right), S^0_{\text{оп}}\left(t_*\right)\right\};\ \nu^0_{\text{оп}}(t_*);\ \xi^0(t_* \mid t_*);\ D^0_{|\text{оп}|}(t_*) = \begin{pmatrix} d_{ij}(\vartheta), & \{j,\vartheta\} \in S^0_{\text{оп}}(t_*) \\ i \in I & \end{pmatrix};\right.$
$\left.\Phi\left(t_* + h\right) = F\left(t^*\right) F^{-1}\left(t_* + h\right);\ D_h\left(t_*\right);\ p^0\left(t_*\right) = \left(p_i^0\left(t_*\right), i \in I\right) = \sum_{\{j,\ \vartheta\} \in S^0_{\text{н}}(t_*)} d_j\left(\vartheta\right) \xi_j^0\left(\vartheta \mid t_*\right)\right\}.$

Процесс управления начинается с подачи на вход объекта управления управляющего воздействия $u^*(t) = \delta(t - t_*) v^0(t_*, x_0),\ t \geq t_*$.

Пусть процесс управления осуществлен на промежутке $\left[t_*, \tau\right[,\ \tau < t^* - h$, т. е. известны оптимальная программа $v^0\left(\tau - h, x^*\left(\tau - h\right)\right)$ и оперативная информация $O(\tau - h) = \left\{K^0_{\text{оп}}(\tau - h);\ \nu^0_{\text{оп}}(\tau - h);\right.$ $\left.\xi^0(\tau - h \mid \tau - h);\ D^0_{|\text{оп}|}(\tau - h);\ \Phi(\tau) = F\left(t^*\right) F^{-1}(\tau);\ D_h(\tau - h);\ p^0(\tau - h)\right\}$.

В момент τ становится известным состояние $x^*(\tau)$ объекта. Требуется найти оптимальную программу задачи (8) для позиции $\left(\tau, x^*(\tau)\right)$. Возможны два случая: а) $\left\{j, \tau - h\right\} \notin S^0_{\text{оп}}\left(\tau - h\right)$ для всех $j \in J$; б) существует такой индекс $j^* \in J$, что $\left\{j^*,\ \tau - h\right\} \in S^0_{\text{оп}}\left(\tau - h\right)$.

В случае а) с использованием информации $O\left(\tau - h\right)$ двойственным методом корректируется опора $K_{\text{оп}}(\tau) = K^0_{\text{оп}}(\tau - h)$ до оптимальной опоры $K^0_{\text{оп}}(\tau)$ в позиции $\left(\tau, x^*(\tau)\right)$.

В случае б) множество $K^0_{\text{оп}}(\tau - h)$ не является опорой задачи (8) для позиции $\left(\tau, x^*(\tau)\right)$, но она – опора следующей задачи, которая эквивалентна задаче (8) для позиции $\left(\tau, x^*(\tau)\right)$:

$$\sum\nolimits_{\vartheta \in T_h^*(\tau - h)} c_h(\vartheta) v(\vartheta) \to \max;$$

$$\tilde{g}_*(\tau) \leq \sum\nolimits_{\vartheta \in T_h^*(\tau - h)} D_h(\vartheta) v(\vartheta) - D_h(\tau - h) \xi^0(\tau - h \mid \tau - h) \leq \tilde{g}^*(\tau); \tag{11}$$

$$\xi^0(\tau - h \mid \tau - h) \leq v(\tau - h) \leq \xi^0(\tau - h \mid \tau - h);\ v(\vartheta) \in V,\ \vartheta \in T_h^*(\tau),$$

где $v(\tau - h)$ – *замороженная* переменная. Задача (11) решается двойственным методом с начальной опорой $K_{\text{оп}}(\tau) = K^0_{\text{оп}}(\tau - h)$.

В обоих случаях на каждой итерации двойственного метода требуется не более двух интегрирований уравнения $\dot{F} = A(t)F,\ F(t_*) = E,$ на промежутке $\left[\tau,\ t^*\right]$.

Ускорение коррекции опор с помощью параллельных вычислений

До начала процесса управления выполняется подготовительная работа. Из множества T_h выбираются произвольные моменты $\tau_l,\quad l = \overline{1, l^*}:\ t_* = \tau_0 < \tau_1 < \ldots < \tau_{l^*} = t^*$. Вычисляются и запоминаются значения

$$F(\tau_l), l = \overline{1, l^*}. \tag{12}$$

В процессе управления вместо интегрирования уравнения $\dot{F} = A(t)F,\ F(t_*) = E,$ на промежутке $\left[\tau, t^*\right]$ выполняется параллельное интегрирование уравнения $\dot{F} = A(t)F$ на всех промежутках $T^l = [\tau_{l-1}, \tau_l], l = \overline{1, l^*},$ с начальными условиями (12).

Пусть $q(\tau)$ – количество итераций двойственного метода решения задачи (8) для позиции $\left(\tau, x^*(\tau)\right)$, $s(l)$ – время интегрирования уравнения $\dot{F} = A(t)F$ на промежутке T^l. Тогда $s(\tau) \approx q(\tau) \max_l s(l)$. Значением $\max_l s(l)$ можно управлять, выбирая моменты $\tau_l,\ l = \overline{1, l^*}$. Число $q(\tau)$ зависит от значения h и используемого метода коррекции опор.

Оптимальное управление в реальном времени стационарным объектом

Пусть поведение динамического объекта описывается уравнением

$$\dot{x} = Ax + Bu,\ t \in T = \left[0, t^*\right[.$$

Для стационарного объекта функция $F(\vartheta), \vartheta \in T_h,$ удовлетворяет рекуррентным уравнениям: прямому

$$F(\vartheta+h)=A_hF(\vartheta),\ \ F(0)=E,\ \ \vartheta\in T_h; \tag{13}$$

обратному

$$F(\vartheta-h)=A_{-h}F(\vartheta),\ \ F(t^*)=A_h^N,\ \ \vartheta\in T_h. \tag{14}$$

В силу формул (13), (14) в процессе управления стационарным объектом отпадает необходимость интегрирования дифференциальных уравнений.

Параллельные вычисления для стационарного объекта. Ускорение вычислений функции $F(\vartheta), \vartheta\in T_h,$ с помощью параллельных вычислений выполняется следующим образом. До начала процесса управления выбираются произвольные моменты $\vartheta_q, q\in Q=\{1, 2, ..., q^*\}:\ 0=\vartheta_0<\vartheta_1<...<\vartheta_{q^*}=t^*.$ По формулам (13), (14) вычисляются и запоминаются значения $F(\vartheta_q), q\in Q.$ Множество T_h разбивается на подмножества $\{0, h, ..., \vartheta_1-h\},\ \ \{\vartheta_1, \vartheta_1+h, ..., \vartheta_2-h\},\ \ ...,\ \ \{\vartheta_{q^*-1}, \vartheta_{q^*-1}+h, ..., \vartheta_{q^*}\}.$ В процессе управления значения $F(\vartheta), \vartheta\in T_h,$ вычисляются по формулам (13), (14) параллельно на всех подмножествах с начальными условиями $F(\vartheta_q), q\in Q.$

Метод «разновесов». Для стационарного объекта кроме параллельных вычислений ускорения вычислений значений функции $F(\vartheta), \vartheta\in T_h,$ можно добиться с помощью метода «разновесов». Положим $\Delta_1=\vartheta_1-\vartheta_0,\ \ \Delta_2=\vartheta_2-\vartheta_1, ...,\ \ \Delta_{q^*}=\vartheta_{q^*}-\vartheta_{q^*-1}.$ Пусть $\Delta_q, q\in Q,$ – такой набор чисел, что для каждого $\vartheta\in T_h$ найдется поднабор $Q(\vartheta)\subseteq Q,$ при котором $\vartheta=\sum_{q\in Q(\vartheta)}\Delta_q.$ Тогда

$$F(\vartheta)=\prod_{q\in Q(\vartheta)}F(\Delta_q). \tag{15}$$

Метод «разновесов» для вычисления функции $F(\vartheta), \vartheta\in T_h,$ состоит в следующем. До начала процесса управления выбирается набор $\Delta_q, q\in Q.$ Вычисляются и запоминаются значения $F(\Delta_q), q\in Q.$ Для каждого $\vartheta\in T_h$ строится поднабор $Q(\vartheta)\subseteq Q.$ В процессе управления значения $F(\vartheta), \vartheta\in T_h,$ вычисляются по формуле (15).

Процесс управления стационарным объектом осуществляется по алгоритму, описанному в пункте «Двойственный метод решения задачи ЛП (5)». Для ускорения вычислений можно дополнительно использовать метод «разновесов» и параллельные вычисления.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф. Математическая теория оптимальных процессов. М., 1983.

2. Беллман Р., Дрейфус С. Прикладные задачи динамического программирования. М., 1965.

3. Габасов Р., Кириллова Ф. М., Тятюшкин А. И. Конструктивные методы оптимизации : в 2 ч. М., 1984. Ч. 1 : Линейные задачи.

Поступила в редакцию 11.12.2013.

Ха Во Тхи Тань – аспирант кафедры методов оптимального управления. Научный руководитель – доктор физико-математических наук, профессор кафедры методов оптимального управления Р. Ф. Габасов.