УДК 519.1

В. Н. КАЛАЧЁВ

К ГИПОТЕЗЕ ХАРТСФИЛДА – РИНГЕЛЯ: (1, 2)-ПОЛЯРНЫЕ И (1, 2)-РАЗЛОЖИМЫЕ ГРАФЫ

Определены графы, называемые антимагическими, дано введение в гипотезу Хартсфилда – Рингеля об антимагичности связных графов и доказано свойство антимагичности для (1, 2)-полярных и (1, 2)-разложимых графов. Основная идея – обобщение результата Барруса, полученного для расщепляемых и 1-разложимых графов. В статье описан алгоритм нумерации ребер (1, 2)-полярных и (1, 2)-разложимых графов, представлено доказательство антимагичности получаемой нумерации, а также рассмотрен частный случай, не вписывающийся в общую концепцию.

Ключевые слова: антимагические графы; гипотеза Хартсфилда – Рингеля; декомпозиция графов; алгоритм нумерации ребер.

Antimagic graphs are defined, the introduction to the Hartsfield – Ringel hypothesis about the antimagicness of connected graphs is given, the property of antimagicness for (1, 2)-polar and (1, 2)-decomposable graphs is proven. The main idea is the generalization of the result obtained by Barrus for split and 1-decomposable graphs. In the article the algorithm of edges numeration for (1, 2)-polar and (1, 2)-decomposable graphs is described, the prove of the antimagicness of such numeration is given, and also a special case, which is an exception from the main result, is considered.

Key words: antimagic graphs; the Hartsfield – Ringel hypothesis; graph decomposition; edges numeration algorithm.

В 1990 г. американские математики Н. Хартсфилд и Г. Рингель (N. Hartsfield, G. Ringel) ввели понятие *антимагической нумерации ребер графа* [1]. Графы, для которых такая нумерация возможна, были названы *антимагическими*. Кроме того, в [1] было высказано предположение, что все связные графы порядка $n \geq 3$ являются антимагическими.

В общем случае эта гипотеза до сих пор не доказана и не опровергнута, хотя существует много работ, ей посвященных. Все имеющиеся на сегодня результаты получены путем сужения задачи на некоторые классы графов.

В частности, в 2008 г. М. Д. Баррус в работе [2] доказал, что расщепляемые графы и 1-разложимые графы антимагические.

Цель настоящей работы – обобщить этот результат, перенеся его на более широкие классы графов, а именно на *(1, 2)-полярные* и *(1, 2)-разложимые* графы. В статье описан алгоритм нумерации ребер таких графов, представлено доказательство антимагичности получаемой нумерации, а также рассмотрен частный случай, не вписывающийся в общую концепцию.

Предварительные сведения

Пусть $G = (V, E)$ – (n, m)-граф, а $\varphi: E \to \{1, 2, ..., m\}$ – некоторая инъективная функция. Определим на V функцию f, положив для $\forall v \in V\ f(v) = \sum_e \varphi(e),$ где e пробегает множество ребер, инцидентных v. Если такая f также оказывается инъективной, то функция φ называется *антимагической нумерацией*, а граф G, для которого существует такая φ, называется *антимагическим*. Очевидно, что не все нумерации антимагического графа являются антимагическими.

Граф G называется *(1, 2)-полярным*, если существует такое разбиение $V = A \coprod B$, что порожденный подграф $G(A)$ является полным, а $G(B)$ – дизъюнктным объединением клик порядка не более 2.

Граф G называется *(1, 2)-разложимым,* или *разложимым на уровне* (1, 2), если существует такое разбиение множества его вершин $V = A \coprod B \coprod C,$ что G является дизъюнктным объединением полного графа $G(A)$, дизъюнктного объединения клик порядка не более 2 $G(B)$, некоторого произвольного графа $G(C)$ и множества ребер $\{ac : a \in A, c \in C\}$.

И в том и в другом случае будем называть подграф $G(A)$ верхней долей, а подграф $G(B)$ – нижней долей графа G.

Далее доказывается наличие антимагической нумерации у (1, 2)-полярных и (1, 2)-разложимых графов.

Алгоритм нумерации ребер

Пусть $G = (V, E)$ – связный (1, 2)-полярный или (1, 2)-разложимый граф. Пусть $V = A \coprod B \coprod C$, где $G(A)$ – верхняя доля; $G(B)$ – нижняя доля; $G(C)$ – произвольный граф. Если G – (1, 2)-полярный, то $C = \varnothing$ и пункты доказательства, относящиеся к C, можно просто опускать.

Можно сказать, что в C нет висячих вершин, иначе можно считать их принадлежащими A.

Также отметим, что $|A| \geq 2$ (иначе ребро вида ab, $a \in A$, $b \in B$, можно взять в качестве клики $G(A)$).

Заметим для случая $C = \varnothing$, что если есть вершина $b \in B$ такая, что $\deg b = |A|$, а в клике есть вершина $a \in A$ с $\deg a = |A| - 1$, то эта вершина вообще не смежна с вершинами не из A и, в частности, с вершиной b. В этом случае можно переместить b в клику и a переместить в B. При этом свойство (1, 2)-полярности графа сохранится и можно будет утверждать, что $\deg b \leq |A| \leq \deg a$ для любых несмежных $a \in A$, $b \in B$. Для случая $C = \varnothing$ такая оценка верна всегда.

Алгоритм нумерации ребер графа

Вход: $G = (V, E)$ – связный (1, 2)-полярный или (1, 2)-разложимый граф, $V = A \coprod B \coprod C$.

Выход: антимагическая нумерация ребер графа – множество пар вида $(e, \varphi(e))$, где $e \in E$, $\varphi(e) \in \{1, 2, ..., m\}$.

Начало алгоритма

1. Пусть $A = \{a_1, ..., a_{|A|}\}$, $B = \{b_1, ..., b_{|B|}\}$, $C = \{c_1, ..., c_{|C|}\}$, где индексы – в порядке неубывания степеней вершин.

Пусть $B' \subseteq B$ – множество вершин, принадлежащих всем $K_2 \subset G(B)$.

2. Выберем все $b'_{1i} \in B'_1 = \{b'_1 \in B' : \deg b'_1 = 1\}$.

Упорядочим инцидентные этим вершинам ребра лексикографически, присвоим таким ребрам первые номера по порядку.

3. Выберем все $b_{1i} \in B_1 = \{b_1 \in B \backslash B' : \deg b_1 = 1\}$.

При необходимости перенумеруем их индексы по неубыванию суммы индексов инцидентных им a_j. Упорядочим инцидентные выбранным вершинам ребра лексикографически, присвоим им следующие номера по порядку.

Заметим: все ребра при висячих вершинах пронумерованы.

4. Непронумерованные ребра вида $b'_i b'_j$ упорядочиваем лексикографически, присвоив им следующие номера по порядку.

5. Введем $g_B : B' \to \mathbb{N}$ так, что $g_B(b')$ – метка на ребре, инцидентном $b' \in B'$.

6. Переупорядочим индексы B по неубыванию степеней вершин с тремя дополнительными условиями:

6.1. $\deg b_i = \deg b_j$, $b_i \in B'$, $b_j \in B \backslash B' \Rightarrow i < j$ (при равенстве степеней сначала нумеруются вершины из B');

6.2. $\deg b_i = \deg b_j$, $b_i \in B'$, $b_j \in B'$, $g_B(b_i) \leq g_B(b_j) \Rightarrow i < j$ (при равенстве степеней вершин из B' индексы упорядочиваются по неубыванию g_B);

6.3. $\deg b_i = \deg b_j$, $b_i \in B \backslash B'$, $b_j \in B \backslash B'$, b_i инцидентна $a_{k_1}, ..., a_{k_p} \in A$, b_j инцидентна $a_{l_1}, ..., a_{l_q} \in A$, $\sum_{t=1}^{p} k_t \leq \sum_{t=1}^{q} l_t \Rightarrow i < j$ (при равенстве степеней вершин из $B \backslash B'$ индексы упорядочиваются по неубыванию суммы индексов смежных этим вершинам вершин из A).

После переупорядочивания получили $B = \{b_1^*, ..., b_{|B|}^*\}$, где индексы упорядочены по неубыванию степеней с дополнительными условиями 6.1–6.3.

Отметим: все вершины степени 1 уже удовлетворяют такой нумерации. Значит, можно начинать с вершин степени не менее 2.

Дальнейшие действия идентичны алгоритму Барруса из [2] и для экономии места опускаются.

Конец алгоритма

Отметим, что в случае $|A| = 2$ общий алгоритм может строить нумерацию, не являющуюся антимагической. Решение этой проблемы рассматривается в разделе «Частный случай: $|A| = 2$».

Доказательство антимагичности получаемой нумерации

Докажем, что построенная нумерация – антимагическая.

I. Для $\forall b_i, b_j \in B \backslash B'$ при $i < j$ получаем $f(b_i) < f(b_j)$, так как $\deg b_i \leq \deg b_j$ и ребра, инцидентные b_i, получают номера раньше ребер, инцидентных b_j.

II. Для вершин из B' степени 1:

• $i < j \Rightarrow f(b'_i) < f(b'_j)$ в силу лексикографического порядка нумерации инцидентных ребер на шаге 2;

- $b_i' \in B',\ b_j \in B \backslash B' \Rightarrow f\left(b_i'\right) < f\left(b_j\right)$ в силу того, что шаг 2 выполняется раньше шага 3.

III. Для вершин из B' степени 2 и выше:

- $b_i' \in B',\ b_j \in B \backslash B',\ \deg b_j < \deg b_i' \Rightarrow f\left(b_j\right) < f\left(b_i'\right)$;
- $b_i' \in B',\ b_j \in B \backslash B',\ \deg b_i' \le \deg b_j \Rightarrow f\left(b_i'\right) < f\left(b_j\right)$;
- $b_i', b_j' \in B',\ \deg b_i' \le \deg b_j' \Rightarrow f\left(b_i'\right) < f\left(b_j'\right)$.

Все эти оценки легко получаются из условий 6.1 и 6.2 и лексикографического порядка нумерации ребер.

Таким образом, доказана инъективность функции f на B.

IV. Для $\forall b \in B, \forall c \in C$ справедлива оценка $\deg b \le |A| < |A| + 1 \le \deg c$. Учитывая, что ребра, инцидентные b, получают номера раньше ребер, инцидентных c, имеем $f(b) < f(c)$.

Таким образом, для $\forall b \in B, \forall c \in C$ верно $f(b) < f(c)$.

V. Рассмотрим $\forall a \in A, \forall b \in B$. Если ребра ba нет, то $\deg b \le \deg a$ в силу сделанного ранее замечания, а так как ребра, инцидентные b, получают номера раньше, чем ребра, инцидентные a, имеем $f(b) < f(a)$.

Пусть ребро ba есть:

- если у b нет соседей, кроме a, то снова получаем $1 = \deg b < \deg a$ и $f(b) < f(a)$;
- если у b есть сосед, кроме a, то:

– либо этот сосед есть $b' \in B' \subset B$, тогда в силу упомянутой раньше оценки $\deg b \le |A|$, а из существования ребра ba получаем оценку $\deg a \ge |A| - 1 + 1 = |A|$. Значит, $\deg b \le \deg a$ и $f(b) < f(a)$;

– либо (если у b нет соседей из B) этот сосед есть $a' \in A$, тогда справедлива оценка $\deg b \le |A| - 1$, а $\deg a \ge |A|$, как уже было сказано. Значит, $\deg b < \deg a$ и $f(b) < f(a)$.

Таким образом, в каждой из ситуаций получаем: для $\forall a \in A,\ \forall b \in B$ выполняется $f(b) < f(a)$.

Инъективность f на C, инъективность f на A и справедливость оценки $f(c) < f(a)$ для $\forall a \in A,\ \forall c \in C$ доказываются аналогично тому, как это сделано в работе М. Д. Барруса (M. D. Barrus, 2010) [2], и для экономии места опускаются.

Отметим, что в случае $|A| = 2$ функция может оказаться неинъективной на A. Эта проблема рассматривается в следующем разделе.

Частный случай: $|A| = 2$

Пусть $|A| = 2$.

Заметим, что в этом случае в $G(A)$ содержится только одно ребро a_1a_2, которое получает последний номер из возможных, т. е. $m = |E|$. Это значит, что после нумерации всех $b_i a_j$ и $c_i a_j$ мы уже не можем изменить соотношение $f\left(a_1\right)$ и $f\left(a_2\right)$, так как у нас просто нет для этого достаточного количества ребер в клике, в отличие от случая $|A| \ge 3$.

К сожалению, имеются случаи, когда после выполнения алгоритма $f\left(a_1\right) = f\left(a_2\right)$.

Для разрешения этой проблемы нам потребуются дополнительные соображения.

Прежде всего, заметим, что в силу оценок, полученных в предыдущем разделе, a_1 и a_2 – единственные вершины, в которых f может принимать одинаковые значения. Следовательно, если после применения алгоритма $f\left(a_1\right) \ne f\left(a_2\right)$, то f инъективна на V и построенная нумерация антимагическая. Если же $f\left(a_1\right) = f\left(a_2\right)$, рассмотрим несколько случаев.

Случай 1. В окрестностях a_1 и a_2 есть по висячей вершине (здесь и далее наличие и вид $G(C)$ не имеют значения и для удобства опускаются).

Пусть без нарушения общности $i < j$, $i_1 < j_1$.

Поменяем местами индексы при b_i и b_j, а также метки i_1 и j_1 на соответствующих ребрах. Имеем: все оценки для f сохранены (заметим, что $\deg b_i \le \deg b_j \le 2$), $f\left(a_1\right) > f\left(a_2\right)$ в силу $i_1 < j_1$. Получили антимагическую нумерацию.

Случай 2 (в окрестностях a_1 и a_2 есть по цепи P_3), *случай 3* (в окрестностях a_1 и a_2 есть по треугольнику) и *случай 4* (a_1 и a_2 входят в цикл C_4) аналогичны и для экономии места опускаются.

Случай 5. В окрестности a_1 нет висячих вершин, но есть цепь P_3, в окрестности a_2 есть висячая вершина, но нет цепей. Пусть в этом случае $k \ge 1$ – максимальный индекс вершины, принадлежащей какой-либо из цепей при a_1, тогда минимальный индекс висячей вершины, инцидентной a_2, равен $k + 1$.

Поменяем местами индексы при b_k и b_{k+1}, а также метки k и $k + 1$. Несложно показать, что все оценки для f сохраняются, а $f\left(a_2\right) > f\left(a_1\right)$ в силу того, что $k < k + 1$. Получили антимагическую нумерацию.

Случай 6. В окрестности a_1 нет висячих вершин и цепей P_3, но есть треугольник, в окрестности a_2 есть висячая вершина и цепь P_3, но нет треугольников. Пусть в этом случае $k \ge 1$ – максимальный индекс вершины, принадлежащей какой-либо из цепей при a_1, $k + l$ $(l \geq 1)$ – максимальный индекс висячей вершины при a_2, а $t \geq 1$ – количество треугольников при a_1 (заметим, что $2t \leq k + l$).

Поменяем местами метки $2k + l + t$ и $2k + l + t + 1$. Также несложно показать, что все оценки для f сохраняются, при этом $f(a_1) < f(a_2)$ в силу $2k + l + t < 2k + l + t + 1$. Получили антимагическую нумерацию.

Случай 7. В окрестности a_1 нет висячих вершин и цепей P_3, но есть треугольник, в окрестности a_2 есть висячая вершина, но нет ни цепей, ни треугольников. Пусть в этом случае $k \geq 1$ – максимальный индекс висячей вершины, смежной с a_2, а $t \geq 1$ – количество треугольников в окрестности a_1 (отметим, что $2t \leq k$).

Сдвинем метки: $k \mapsto k + 3t$, метки на треугольниках уменьшим на 1 ($k + 1 \mapsto k$, $k + 2 \mapsto k + 1$ и т. д.). Оценки для f снова сохранены, а $f(a_1) < f(a_2)$, так как первая сумма уменьшилась на $t(t+1)/2$, а вторая увеличилась на $3t$. Получили антимагическую нумерацию.

Случай 8. В окрестности a_1 нет висячих вершин и цепей P_3, но есть треугольник, в окрестности a_2 есть цепь P_3, но нет висячих вершин и треугольников. Пусть в этом случае $k \geq 1$ – максимальный индекс вершины, принадлежащей какой-либо из цепей при a_2, а $t \geq 1$ – количество треугольников при a_1 (как и выше, $2t \leq k$).

Поменяем местами метки $k + t$ и $k + t + 1$. Как и ранее, оценки для f сохранены, а $f(a_2) < f(a_1)$, так как $k + t < k + t + 1$. Получили антимагическую нумерацию.

Других случаев нет. Таким образом, доказана инъективность f на A в случае $|A| \geq 3$ и показаны все возможные проблемы и способы их разрешения в случае $|A| = 2$.

Итак, f инъективна на V. Значит, предложенная нумерация – антимагическая.

Таким образом, в настоящей работе доказано, что (1, 2)-полярные и (1, 2)-разложимые графы являются антимагическими и приведен алгоритм, строящий для таких графов антимагическую нумерацию.

Отдельно следует отметить, что дальнейшие попытки обобщения полученных результатов на $(1, k)$-разложимые графы при $k \geq 3$ аналогичным методом оказались менее успешными. С усложнением структуры нижней доли алгоритм все сложнее модифицировать и он все хуже справляется с кликами малой размерности – требуется рассматривать все больше и больше частных случаев, зачастую непростых, что в конечном итоге сводит эффективность алгоритма к нулю. В целом подобное обобщение представляется возможным, но нецелесообразным.

В будущем планируется дальнейшее исследование гипотезы Хартсфилда – Рингеля об антимагичности связных графов с помощью теории декомпозиции графов.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Hartsfield N., Ringel G. Pearls in Graph Theory. Boston, 1990 (revised version, 1994). P. 108–109.

2. Barrus M. D. Antimagic labeling and canonical decomposition of graphs // Inform. Processing Letters J. 2010. Vol. 110. Iss. 7.

Поступила в редакцию 25.02.2014.

Виталий Николаевич Калачёв – студент 5-го курса механико-математического факультета.