УДК 33:517.925

Б. С. КАЛИТИН

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ РЫНКА ТРЕХ ВЗАИМОДОПОЛНЯЮЩИХ ТОВАРОВ

Исследуется устойчивость экономического равновесия математической модели рынка трех взаимодополняющих товаров или услуг. Модель такой экономики представлена в виде системы нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений относительно вектора цен. Конструкция модели основывается на понятии экономических сил продавцов, покупателей и государства. Используются функциональные выражения таких сил с учетом экономических законов товарного рынка. В модели предполагается, что объем продаж есть функция цены, зависящая от параметров эластичностей, и модель обладает экономическим равновесием. Исследована задача об устойчивости в основном и критическом случаях двух нулевых корней. Получены достаточные условия устойчивого развития рынка для некоторых частных типов рынков (абсолютно симметричный случай и др.) и дан анализ устойчивых многообразий. Представлено экономическое толкование результатов.

Ключевые слова: взаимодополняющие товары; рынок; динамическая модель; экономическое равновесие; устойчивость.

We study the market dynamics of three complementary goods or services. The mathematical model of this economic is a system of nonlinear ordinary differential equations on a vector of prices. The construction of model is based on the notion of economic forces sellers, buyers and State. We use the functional expression of such force, taking into account the economic laws of the product market. The model assumes that the volume of output is a function of prices, which depends on parameters of the elasticity, and economic system has equilibrium. The problem of stability in the principal and critical case two zero root is investigated. It is established a sufficient conditions of dynamic stability for some particular case market (absolutely symmetric case and other) and analysis of stability varieties is presented. The economic interpretation of all results is given.

Key words: complementary goods; market; dynamic model; economic equilibrium; stability.

В первой части исследования [1] рассмотрена динамика рынка трех взаимозаменяемых товаров или услуг относительно вектора рыночных цен. В настоящей части продолжается изучение рынка трех благ для случая взаимодополняющих товаров. Необходимо решить задачу устойчивости экономического равновесия в основном и критическом случаях, причем для краткости используются обозначения и понятия работы [1].

1. Известные экономические отличия взаимодополняющих и взаимозаменяемых товаров или услуг приводят к соответствующим изменениям используемой в [1] модели. Во-первых, в нашем случае отсутствуют силы конкуренции (все коэффициенты c_{ji} равны нулю) и модель принимает вид трех нелинейных дифференциальных уравнений относительно вектора цен $p=\left(p_1, p_2, p_3\right)$:

$$\dot{p}_j=-\frac{v_j p_j'\left(p_j-p_j^0\right)}{p_j-p_j^*}-\frac{d_j p_j''\left(p_j-p_j^0\right)}{p_j^{**}-p_j}+\frac{r_j}{q_j^0}\left(p_j q_j\left(p\right)-p_j^0 q_j^0\right), \qquad (1)$$
$$p_j^*<p_j<p_j^{**},\ j=1, 2, 3.$$

Во-вторых, поскольку при построении модели экономической системы [1] предполагается действие закона спроса, то на рынке взаимодополняющих товаров величины перекрестных эластичностей отрицательны [3]. В связи с этим в отличие от первой части работы функцию объема продаж выберем в виде

$$q_j\left(p\right)=q_j^0-e_j\frac{q_j^0}{p_j^0}\left(p_j-p_j^0\right)-\sum_{i=1,\, i\neq j}^{3} e_{ji}\frac{q_j^0}{p_i^0}\left(p_i-p_i^0\right), \qquad (2)$$

где $e_j>0$ и $e_{ji}>0$ – ценовая эластичность спроса на j-й товар и перекрестная эластичность спроса на j-й товар по цене i-го товара $\left(\text{в точке } p=p^0\right)$ соответственно.

2. Исследуем сначала устойчивость экономического равновесия $p_j=p_j^0,\ j=1, 2, 3$, системы (1) по первому приближению. Для этого сделаем в (1) замену переменных $x_j=p_j-p_j^0$. Тогда получим новую систему дифференциальных уравнений относительно вектора $x=\left(x_1, x_2, x_3\right)$:

$$\dot{x}_j=-\frac{v_j p_j' x_j}{x_j+p_j'}-\frac{d_j p_j'' x_j}{p_j''-x_j}+\frac{r_j}{q_j^0}\left(\left(x_j+p_j^0\right)q_j\left(x+p^0\right)-p_j^0 q_j^0\right),\ j=1, 2, 3,$$

где компоненты x подчинены условиям $-p_j'<x_j<p_j''$. Соответственно функции объемов продаж (2) преобразуются к виду

$$q_j\left(p\right)=q_j\left(x+p^0\right)=q_j^0-e_j\frac{q_j^0}{p_j^0}x_j-\sum_{i=1,\, i\neq j}^{3} e_{ji}\frac{q_j^0}{p_i^0}x_i,\ j=1, 2, 3.$$

После подстановки функции $q\left(x+p^0\right)$ получим следующую модель экономической системы:

$$\dot{x}_j = -\frac{v_j p'_j x_j}{x_j + p'_j} - \frac{d_j p''_j x_j}{p''_j - x_j} + r_j \left(1 - e_j\right) x_j - r_j \sum_{i=1,\, i \neq j}^{3} e_{ji} \frac{p_j^0}{p_i^0} x_i - \frac{r_j}{p_j^0} e_j x_j^2 - r_j x_j \sum_{i=1,\, i \neq j}^{3} \frac{e_{ji}}{p_i^0} x_i, \tag{3}$$

$$-p'_j < x_j < p''_j, \ \ j = 1, 2, 3.$$

Экономическому равновесию теперь соответствует начало координат $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ системы уравнений (3). Выделим здесь первое приближение в окрестности точки $x = 0$. Тогда получим

$$\dot{x}_j = -S_j x_j - \sum_{i=1,\, i \neq j}^{3} G_{ji} x_i, \ j = 1, 2, 3, \tag{4}$$

где $S_j = v_j + d_j - r_j \left(1 - e_j\right)$ – запас прочности рынка j-го товара [1] и положено

$$G_{ji} = \left(r_j e_{ji} p_j^0\right) / \, p_i^0, \ \ i, j = 1, 2, 3 \ (i \neq j). \tag{5}$$

Назовем систему уравнений (4) линейной моделью рынка трех товаров в переменных $x_j = p_j - p_j^0$ – отклонений цен от равновесных состояний. Рассмотрим ряд отдельных случаев.

Однородность рыночных характеристик реализуемых благ. Предположим, что товары обладают определенной идентичностью некоторых из своих параметров таким образом, что матрица $G = \left(G_{ji}\right)$ коэффициентов модели (5) симметрична. Тогда для простоты можно положить $G_{12} = G_{21} = G_1$, $G_{23} = G_{32} = G_2$, $G_{13} = G_{31} = G_3$ и записать характеристическое уравнение матрицы системы (4) в виде

$$\lambda^3 + a_1 \lambda^2 + a_2 \lambda + a_3 = 0, \tag{6}$$

где

$$a_1 = \left(S_1 + S_2 + S_3\right); \ \ a_2 = S_1 S_2 + S_2 S_3 + S_3 S_1 - G_1^2 - G_2^2 - G_3^2;$$

$$a_3 = S_1 S_2 S_3 - G_2^2 S_1 - G_3^2 S_2 - G_1^2 S_3 + 2 G_1 G_2 G_3.$$

Из (6) следуют условия асимптотической устойчивости экономического равновесия (критерий Рауса – Гурвица): $a_1 > 0$, $a_1 a_2 > a_3$, $a_3 > 0$. В подробной записи они имеют вид соотношений

$$\begin{gathered} S_1 + S_2 + S_3 > 0; \\ \left(S_1 + S_2 + S_3\right)\left(S_1 S_2 + S_2 S_3 + S_3 S_1 - G_1^2 - G_2^2 - G_3^2\right) > \\ > S_1 S_2 S_3 - S_1 G_2^2 - S_2 G_3^2 - S_3 G_1^2 + 2 G_1 G_2 G_3; \\ S_1 S_2 S_3 - S_1 G_2^2 - S_2 G_3^2 - S_3 G_1^2 + 2 G_1 G_2 G_3 > 0. \end{gathered} \tag{7}$$

Очевидно, что в общем случае дать полный анализ неравенств (7) и соответствующую ему экономическую интерпретацию достаточно сложно. Выделим случаи, отвечающие тем или иным рыночным ситуациям. Предположим, что выполнены следующие условия:

- экономическая сила государства имеет одинаковый эффект воздействия на всех продавцов;
- перекрестные ценовые эластичности спроса всех товаров совпадают;
- запасы прочности двух из трех товаров одинаковы.

При выполнении этих условий модель (4) удовлетворяет следующим требованиям:

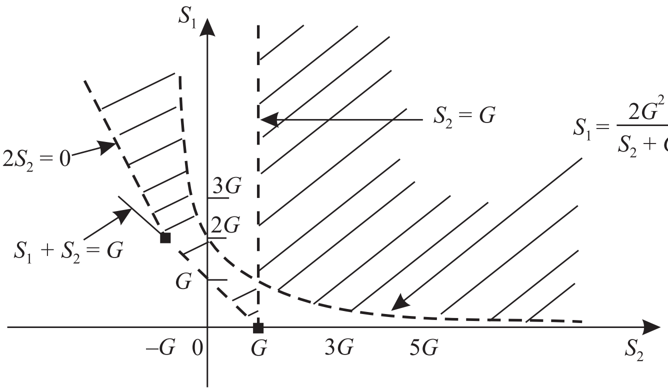
$$r_j = r, \ e_{ji} = e^*, \ p_j^0 = p_i^0 = p^0, \ \ G_{ji} = G = r e^*, \ \ i, j = 1, 2, 3, \text{ и } S_2 = S_3. \tag{8}$$

С учетом (8) условия асимптотической устойчивости (6) упрощаются и их можно преобразовать, записав соответственно следующими неравенствами:

$$\begin{gathered} S_1 + 2 S_2 > 0; \\ \left(S_1 + S_2 + G\right)\left(S_1 S_2 + S_2^2 - G S_2 - G^2\right) > 0; \\ \left(S_2 - G\right)\left(S_1 S_2 + G S_1 - 2 G^2\right) > 0. \end{gathered} \tag{9}$$

Анализ условий (9) позволяет выделить решение системы неравенств на плоскости переменных $\left(S_1, S_2\right)$ в виде множества точек, схематично изображенных заштрихованными областями (рисунок).

Отметим, что наряду с областью, где все запасы прочности положительны, например в первой четверти, где выполняются неравенства $S_2 > G$, $S_1 S_2 + S_2 G - 2 G^2 > 0$, имеется и область, для которой $S_1 > 0$, $S_2 = S_3 < 0$. При этом оба эти множества не ограничены. Кроме того, область асимптотической



Область асимптотической устойчивости

устойчивости не содержит точек третьей и четвертой четвертей, а значит, запасы прочности всех товаров не могут быть одновременно отрицательными. Если $S_j > G$, можно сказать, что рынок прочно стабилен.

Абсолютно симметричный случай. Предположим теперь, что представленные на рынке блага симметричны по своим характеристикам, а именно, наряду с условиями (8) выполняются также и условия постоянства следующих параметров:

$$v_j = v,\ \ d_j = d,\ \ e_j = e, j = 1, 2, 3. \tag{10}$$

Тогда запасы прочности рынка товаров идентичны, $S_j = S$, и система (4) принимает вид

$$\dot{x}_j = -Sx_j - G\sum_{i=1,\, i\neq j}^{3} x_i,\ j = 1, 2, 3,$$

где $S = v + d - r(1-e)$, $G = re^*$. Здесь характеристическое уравнение представляется в форме

$$\left(\lambda + S - G\right)^2 (\lambda + S + 2G) = 0. \tag{11}$$

Поэтому корни уравнения (11) являются вещественными и если $S > G$, то они имеют отрицательные действительные части, что соответствует асимптотической устойчивости равновесия. При $S < G$ равновесие системы (4) неустойчиво.

Рассмотрим подробнее случай $S > G$. С учетом принятых обозначений это дает

$$v + d > r\left(1 - e + e^*\right). \tag{12}$$

Проанализируем два случая в зависимости от знака величины $\left(1 - e + e^*\right)$.

I. Если $e < 1 + e^*$ (ограниченная эластичность спроса по цене), то при выполнении условия (12) равновесие асимптотически устойчиво. Отсюда вытекает, в частности, и то, что в случае ограниченной эластичности спроса по цене увеличение налоговой ставки (параметр r) может привести к нарушению устойчивости рынка.

II. Если же выполняется обратное неравенство $e \geq 1 + e^*$ (эластичный спрос по цене), то условие (12) всегда выполняется. Таким образом, рынок трех однородных товаров с эластичным ценовым спросом способен устойчиво функционировать при высоких налогах.

Аналогично этому получаем неустойчивость экономического равновесия модели (1), если

$$e < 1 + e^*,\ \ v + d < r\left(1 - e + e^*\right),$$

что в условиях ограниченной ценовой эластичности спроса означает достаточно высокий уровень налогообложения.

Критический случай двух нулевых корней с двумя группами решений. Рассмотрим проблему устойчивости нелинейной модели в абсолютно симметричном случае (т. е. при выполнении равенств (8) и (10)), когда один из корней характеристического уравнения (10) равен нулю. Из соотношения (11) вытекают следующие возможные ситуации.

• При $S = G$ имеем *критический случай двух нулевых корней с двумя группами решений* [2]. Здесь третий корень $\lambda = -3G$ отрицательный, а значит, задача об устойчивости равновесия требует дополнительных исследований.

• При $S = -2G$ имеем один нулевой корень и два совпадающих положительных корня $\lambda_1 = \lambda_2 = 3G$, а значит, равновесие неустойчиво.

• Критический случай наличия пары чисто мнимых корней невозможен.

Таким образом, в нелинейной модели (4) остается неисследованной ситуация, когда $S = G$, т. е. $v + d = r\left(1 - e + e^*\right)$. Пусть это выполняется. Положим $R = \dfrac{re^*}{p^0}$ и выпишем математическую модель (3), используя обозначения (8) и (10):

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= -\frac{vp'x_1}{x_1 + p'} - \frac{dp''x_1}{p'' - x_1} + r\left(1-e\right)x_1 - G\left(x_2 + x_3\right) - \frac{re}{p^0}x_1^2 - Rx_1\left(x_2 + x_3\right),\\
\dot{x}_2 &= -\frac{vp'x_2}{x_2 + p'} - \frac{dp''x_2}{p'' - x_2} + r\left(1-e\right)x_2 - G\left(x_1 + x_3\right) - \frac{re}{p^0}x_2^2 - Rx_2\left(x_1 + x_3\right),\\
\dot{x}_3 &= -\frac{vp'x_3}{x_3 + p'} - \frac{dp''x_3}{p'' - x_3} + r\left(1-e\right)x_3 - G\left(x_1 + x_2\right) - \frac{re}{p^0}x_3^2 - Rx_3\left(x_1 + x_2\right).
\end{aligned} \tag{13}$$

Выделим частные случаи, связанные с симметрией этих трех уравнений.

А. Можно показать, что равенство $x_2 - x_3 = 0$ $\left(\text{а также } x_1 - x_2 = 0 \text{ и } x_3 - x_1 = 0\right)$ представляет собой интегральную поверхность. Для этого достаточно, например, вычислить производную по времени $\dot{x}_2 - \dot{x}_3$ и убедиться, что эта производная равна нулю, если $x_2 - x_3 = 0.$ Исследуем поведение решений на плоскости $x_2 - x_3 = 0.$ В этом случае получаем систему второго порядка:

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= -\frac{vp'x_1}{x_1 + p'} - \frac{dp''x_1}{p'' - x_1} + r\left(1-e\right)x_1 - 2Gx_2 - \frac{re}{p^0}x_1^2 - 2Rx_1x_2,\\
\dot{x}_2 &= -\frac{vp'x_2}{x_2 + p'} - \frac{dp''x_2}{p'' - x_2} + r\left(1-e\right)x_2 - G\left(x_1 + x_2\right) - \frac{re}{p^0}x_2^2 - Rx_2\left(x_1 + x_2\right).
\end{aligned} \tag{14}$$

Преобразуем каждое из уравнений (14), представив правые части с помощью рядов Тейлора в окрестности начала координат $\mathbb{R}^2$ с точностью до слагаемых третьего порядка малости. Несложные вычисления дают

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= -Gx_1 - 2Gx_2 + H_2\left(x_1\right)^2 - 2Rx_1x_2 - H_3\left(x_1\right)^3 + o\left(\|x\|^3\right),\\
\dot{x}_2 &= -Gx_1 - 2Gx_2 + \left(H_2 - R\right)\left(x_2\right)^2 - Rx_1x_2 - H_3\left(x_2\right)^3 + o\left(\|x\|^3\right),
\end{aligned} \tag{15}$$

где положено

$$H_2 = \frac{v}{p'} - \frac{d}{p''} - \frac{re}{p^0}, \; H_3 = \frac{v}{\left(p'\right)^2} + \frac{d}{\left(p''\right)^2}. \tag{16}$$

Несложно убедиться, что нулевое решение редуцированной системы (15) соответствует критическому случаю одного нулевого корня [2] $\left(\lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = -3G\right).$ Для исследования устойчивости решения $x_1 = x_2 = 0$ сделаем замену переменных

$$y_1 = x_1 - x_2, \quad y_2 = x_2; \quad x_1 = y_1 + y_2, \quad x_2 = y_2.$$

Она приводит (15) к виду

$$\begin{aligned}
\dot{y}_1 &= H_2\left(y_1\right)^2 + \left(2H_2 - R\right)y_1y_2 + R\left(y_2\right)^2 - H_3\left(y_1\right)^3 - 3H_3\left(y_1\right)^2 y_2 - 3H_3y_1\left(y_2\right)^2,\\
\dot{y}_2 &= -Gy_1 - 3Gy_2 + \left(H_2 - 2R\right)\left(y_2\right)^2 - Ry_1y_2 - H_3\left(y_2\right)^3.
\end{aligned}$$

Согласно процедуре исследования критического случая одного нулевого корня [2] найдем решение $y_2\left(y_1\right) = \alpha y_1 + \beta\left(y_1\right)^2 + \ldots$ уравнения в неявных функциях

$$-Gy_1 - 3Gy_2 + \left(H_2 - 2R\right)\left(y_2\right)^2 - Ry_1y_2 - H_3\left(y_2\right)^3 = 0.$$

Заменяем здесь y_2 рядом по степеням переменной y_1 и приравниваем коэффициенты при одинаковых степенях y_1 к нулю. В результате находим значения

$$\alpha = -\frac{1}{3}, \quad \beta = \frac{H_2 + R}{27G}.$$

Подставив найденное решение $y_2 = y_2(y_1)$ в первое уравнение, получим скалярное дифференциальное уравнение

$$\dot{y}_1 = \frac{3H_2 + 4R}{9}(y_1)^2 + \left((6H_2 - 5R)\frac{H_2 + R}{3 \cdot 27G} - H_3\frac{1}{3}\right)(y_1)^3 + \ldots. \quad (17)$$

Имея в виду обозначения (16), проведем анализ устойчивости этого уравнения. С учетом алгоритма исследования критического случая одного нулевого корня [2] следует, что при $3H_2 + 4R \neq 0$ равновесие неустойчиво. Если же $3H_2 + 4R = 0$, то $H_2 = -4R/3$ и коэффициент при y_1^3 в выражении (17) равен $\left(13R^2 - 81GH_3\right)/81G$. Поэтому при $13R^2 - 81GH_3 < 0$ нулевое решение (18) асимптотически устойчиво, а при $13R^2 - 81GH_3 > 0$ – неустойчиво.

Отметим, что в силу симметрии переменных x_1, x_2, x_3 в системе уравнений (13) результаты анализа двумерной системы (14) будут точно такими же, как и для многообразий $x_1 - x_2 = 0$ и $x_3 - x_1 = 0$.

Следовательно, если начальные возмущения модели принадлежат многообразию точек $x_2 - x_3 = 0$ $(x_1 - x_2 = 0$ или $x_3 - x_1 = 0)$, то при выполнении неравенства $13R^2 - 81GH_3 < 0$ равновесие асимптотически устойчиво, а при $13R^2 - 81GH_3 > 0$ – неустойчиво.

Если же $13R^2 - 81GH_3 = 0$, то для получения условий устойчивости экономического равновесия потребуются разложения в ряд Тейлора более высокого порядка малости, чем третий в уравнениях (13).

Б. Аналогично предыдущему можно утверждать, что прямая линия $x_1 = x_2 = x_3$ в пространстве $\mathbb{R}^3$ представляет собой инвариантное множество модели. На этом множестве система равносильна скалярному дифференциальному уравнению

$$\dot{x}_1 = -\frac{vp'x_1}{x_1 + p'} - \frac{dp''x_1}{p'' - x_1} + r(1-e)x_1 - 2Gx_1 - \frac{re}{p^0}x_1^2 - 2Rx_1^2, \quad (18)$$

у которого линейное приближение правой части есть $-(S+G)x_1 = -2Gx_1$. Поскольку $G > 0$, то нулевое решение уравнения (18) асимптотически устойчиво независимо от остальных параметров модели.

Результаты исследований абсолютно симметричного случая представим в виде теоремы.

Теорема. *Предположим*, *что для модели* (2) *выполнены условия* (8) *и* (10). *Тогда экономическое равновесие* $p_j = p_j^0$, $j = 1, 2, 3$, *будет асимптотически устойчивым в каждом из следующих случаев*:

1) $e \geq 1 + e^*$;

2) $e < 1 + e^*$, $v + d > r\left(1 - e + e^*\right)$.

Равновесие будет неустойчивым, *если выполняются соотношения*:

3) $e < 1 + e^*$, $v + d \leq r\left(1 - e + e^*\right)$.

В заключение следует отметить, что поскольку изучаемая математическая модель рынка трех взаимодополняющих товаров или услуг характеризуется несколькими произвольными параметрами, то полное исследование, согласно предложенному в [2] алгоритму критического случая двух нулевых корней с двумя группами решений, представляет серьезные трудности технического характера. Для такой ситуации в данной работе выделены отдельные многообразия параметров, соответствующие асимптотической устойчивости равновесия. Одновременно указаны те значения параметров модели, для которых в критическом случае двух нулевых корней экономическое равновесие неустойчиво.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Калитин Б. С. Об устойчивости рынка трех взаимозаменяемых товаров // Вестн. БГУ. Сер. 1, Физика. Математика. Информатика. 2014. № 2. С. 87–92.

2. Каменков Г. В. Устойчивость движения. Колебания. Аэродинамика : в 2 т. М., 1972. Т. 1.

3. Долан Э. Дж., Линсдей Д. Рынок: микроэкономическая модель. СПб., 1992.

Поступила в редакцию 18.12.2013.

Борис Сергеевич Калитин – кандидат физико-математических наук, профессор кафедры аналитической экономики и эконометрики.