# Математика и информатика

УДК 539.3

*В. В. КОРОЛЕВИЧ (ЧЕХИЯ), Д. Г. МЕДВЕДЕВ*

## ИССЛЕДОВАНИЕ НЕСИММЕТРИЧНЫХ ИЗГИБНЫХ КОЛЕБАНИЙ ПОЛЯРНО-ОРТОТРОПНЫХ КОЛЬЦЕВЫХ ПЛАСТИН ПЕРЕМЕННОЙ ТОЛЩИНЫ, СКРЕПЛЕННЫХ С УПРУГИМ ОСНОВАНИЕМ ПАСТЕРНАКА

Исследуется в общем виде задача вынужденных нерезонансных несимметричных малых изгибных колебаний полярно-ортотропных кольцевых пластин переменной толщины, скрепленных с упругим основанием Пастернака. Для решения дифференциального уравнения в частных производных, описывающего вынужденные изгибные колебания кольцевой пластины на упругом основании Пастернака под воздействием гармонической поперечной нагрузки, применяется операционное исчисление. Изображение функции динамического прогиба раскладывается в ряды Фурье по окружной координате θ. В результате получается бесконечная система неоднородных обыкновенных дифференциальных уравнений 4-го порядка для изображений радиальных функций динамических прогибов. Данные дифференциальные уравнения сводятся к линейным интегральным уравнениям Вольтерры 2-го рода. Решения этих интегральных уравнений записываются с использованием резольвенты. Найдены изображения всех динамических функций рассматриваемой задачи. Даются рекомендации по аналитическим и численным методам нахождения оригиналов этих функций. Приводятся формулы расчета нормальных и касательных динамических напряжений в кольцевой пластине. В случае нулевой поперечной нагрузки имеем задачу расчета спектра собственных частот несимметричных колебаний кольцевой анизотропной пластины, скрепленной с упругим основанием Пастернака.

***Ключевые слова:*** цилиндрическая ортотропия; кольцевая пластина; упругое основание Пастернака; несимметричные колебания; дифференциальные уравнения; интегральные уравнения; интегральное преобразование Лапласа; интегральное уравнение Вольтерры; резольвента.

In this work is investigated in general form the problem of forced non-resonant asymmetrical small flexural vibrations of polar-orthotropic annular plates of variable thickness, fastened with elastic Pasternak base. For differential equation in partial derivates, describing the forced flexural vibrations of the annular plates on the elastic Pasternak base under the influence of a harmonic transverse loading is applied the operational calculus. The image of the function of dynamic bending are laid out in Fourier series by the circuit variable θ. As a result turns out in an infinite system of inhomogeneous ordinary differential equations of the 4$^{th}$ kind for images of radial functions of dynamic bending. Given differential equations come down to linear Volterra integral equations of the 2$^{nd}$ kind. Solutions of these integral equations are written using the resolvent. We find images of all dynamic functions of the considered problem. Recommendations are given on analytical and numerical methods of finding the originals of these functions. The formulas for calculating the normal and tangential dynamic stresses in the annular plates are given. In the case of zero transverse loading we have the problem of calculating of eigenfrequencies the spectrum of asymmetric vibrations of the annular anisotropic plates, fastened with elastic Pasternak base.

***Key words:*** cylindrical orthotropy; annular plate; elastic Pasternak base; asymmetric vibrations; differential equations; Laplace integral transformation; integral equations of Volterra; resolvent.

С помощью линейных интегральных уравнений Вольтерры 2-го рода исследуем вынужденные нерезонансные несимметричные изгибные колебания анизотропных кольцевых пластин переменной толщины, скрепленных с упругим основанием Пастернака. Пластина изготовлена из материала, обладающего цилиндрической ортотропией, причем ось анизотропии совпадает с геометрической осью кольцевой пластины и в каждой точке тела имеются три взаимно ортогональные плоскости упругой симметрии. Внутренний радиус кольцевой пластины обозначим $r_0$, а внешний – $R$. Толщина пластины $h(r)$ изменяется вдоль радиуса $r$ по заданному закону и на внутреннем контуре равна $h_0$.

Введем цилиндрическую систему координат $r$, θ, $z$, поместив начало в точке пересечения оси анизотропии со срединной плоскостью пластины.

Приложенная распределенная поперечная нагрузка интенсивности $q_z(r, \theta, t)$ изменяется во времени $t$ по гармоническому закону с частотой $\Omega$, не совпадающей ни с одной из собственных частот колебаний кольцевой пластины (так называемые *нерезонансные* колебания).

Исследование будем проводить в рамках классической теории изгиба тонких пластин, основанной на гипотезах Кирхгофа.

Обозначим перемещение точек срединной поверхности пластины в направлении оси $z$ в каждый момент времени $t$ через $w(r, \theta, t)$, называемое ниже *функцией динамического прогиба*.

Согласно модели Пастернака связь динамической реакции $q_r(r, \theta, t)$ упругого основания с функцией динамического прогиба $w(r, \theta, t)$ задается в виде [1, 2]

$$q_r(r, \theta, t) = k_0 w(r, \theta, t) - k_1 \Delta w(r, \theta, t) + m_f \ddot{w}_{tt}(r, \theta, t), \tag{1}$$

где $k_0$ – коэффициент сопротивления сжатию упругого основания; $k_1$ – коэффициент сопротивления сдвигу упругого основания; $m_f$ – массовый коэффициент упругого основания; $\Delta$ – оператор Лапласа в цилиндрических координатах;

$$\Delta w(r, \theta, t) = \left( \frac{\partial^2 w(r, \theta, t)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w(r, \theta, t)}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w(r, \theta, t)}{\partial \theta^2} \right).$$

Если коэффициент $k_1 = 0$, то имеем упругое основание Винклера.

Выделим из пластины двумя меридиональными плоскостями, образующими с координатной плоскостью $rz$ углы $\theta$ и $\theta + d\theta$, и двумя цилиндрическими поверхностями радиусом $r$ и $r + dr$, нормальными к срединной плоскости, бесконечно малый элемент пластины. Запишем систему уравнений движения этого элемента [3]:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial (rQ_r)}{\partial r} + \dfrac{\partial Q_\theta}{\partial \theta} + (q_z - q_r) r = \rho h(r) r \dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \\ \dfrac{\partial (rM_r)}{\partial r} + \dfrac{\partial M_{\theta r}}{\partial \theta} - M_\theta - rQ_r = 0, \\ \dfrac{\partial (rM_{r\theta})}{\partial r} + \dfrac{\partial M_\theta}{\partial \theta} + M_{\theta r} - rQ_\theta = 0, \end{cases} \tag{2}$$

где $M_r(r, \theta, t)$, $M_{r\theta}(r, \theta, t)$, $Q_r(r, \theta, t)$ – динамические изгибающий и крутящий моменты, динамическое поперечное усилие соответственно, действующие в цилиндрическом сечении; $M_\theta(r, \theta, t)$, $M_{\theta r}(r, \theta, t)$, $Q_\theta(r, \theta, t)$ – динамические изгибающий и крутящий моменты, динамическое поперечное усилие соответственно, действующие в радиальном сечении; $M_{r\theta}(r, \theta, t) = M_{\theta r}(r, \theta, t)$; $\rho$ – плотность материала пластины.

Из последних двух уравнений системы (2) выразим динамические поперечные усилия $Q_r(r, \theta, t)$, $Q_\theta(r, \theta, t)$ через динамические изгибающие $M_r(r, \theta, t)$, $M_\theta(r, \theta, t)$ и крутящий $M_{r\theta}(r, \theta, t)$ моменты:

$$Q_r(r, \theta, t) = \frac{1}{r} \left( \frac{\partial (rM_r)}{\partial r} + \frac{\partial M_{r\theta}}{\partial \theta} - M_\theta \right), \quad Q_\theta(r, \theta, t) = \frac{1}{r} \left( \frac{\partial (rM_{r\theta})}{\partial r} + \frac{\partial M_\theta}{\partial \theta} + M_{r\theta} \right). \tag{3}$$

Подставим выражение для динамической реакции упругого основания из (1) и правые части выражений для динамических поперечных усилий из (3) в первое уравнение системы (2). В результате получим уравнение вида

$$\begin{gathered} \frac{\partial^2 M_r}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial M_r}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 M_\theta}{\partial \theta^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial M_\theta}{\partial r} + \frac{2}{r} \frac{\partial^2 M_{r\theta}}{\partial r \partial \theta} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial M_{r\theta}}{\partial \theta} + \\ + q_z(r, \theta) - k_0 w + k_1 \left( \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) = \left[ m_f + \rho h(r) \right] \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}. \end{gathered} \tag{4}$$

Выразим динамические изгибающие моменты $M_r(r, \theta, t)$, $M_\theta(r, \theta, t)$, динамический крутящий момент $M_{r\theta}(r, \theta, t)$ и динамические поперечные усилия $Q_r(r, \theta, t)$, $Q_\theta(r, \theta, t)$ через функцию динамического прогиба $w(r, \theta, t)$ [4]:

$$M_r(r, \theta, t) = -D_{11}(r) \left[ \frac{\partial^2 w(r, \theta, t)}{\partial r^2} + \nu_{\theta r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial w(r, \theta, t)}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w(r, \theta, t)}{\partial \theta^2} \right) \right],$$

$$M_\theta(r,\theta,t) = -D_{11}(r)\left[\nu_{\theta r}\frac{\partial^2 w(r,\theta,t)}{\partial r^2} + k^2\left(\frac{1}{r}\frac{\partial w(r,\theta,t)}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 w(r,\theta,t)}{\partial\theta^2}\right)\right],$$

$$M_{r\theta}(r,\theta,t) = -cD_{11}(r)\left(\frac{1}{r}\frac{\partial^2 w(r,\theta,t)}{\partial r\partial\theta} - \frac{1}{r^2}\frac{\partial w(r,\theta,t)}{\partial\theta}\right), \qquad (5)$$

$$Q_r(r,\theta,t) = -D_{11}(r)\left[\left(\frac{\partial^3 w(r,\theta,t)}{\partial r^3} + \frac{1}{r}\frac{\partial^2 w(r,\theta,t)}{\partial r^2}\right) + \left(c+\nu_{\theta r}\right)\left(\frac{1}{r^2}\frac{\partial^3 w(r,\theta,t)}{\partial r\partial\theta^2} - \frac{1}{r^3}\frac{\partial^2 w(r,\theta,t)}{\partial\theta^2}\right) -\right.$$

$$\left.-k^2\left(\frac{1}{r^2}\frac{\partial w(r,\theta,t)}{\partial r} + \frac{1}{r^3}\frac{\partial^2 w(r,\theta,t)}{\partial\theta^2}\right)\right] - \frac{dD_{11}}{dr}\left[\frac{\partial^2 w(r,\theta,t)}{\partial r^2} + \nu_{\theta r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial w(r,\theta,t)}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 w(r,\theta,t)}{\partial\theta^2}\right)\right],$$

$$Q_\theta(r,\theta,t) = -D_{11}(r)\left[\left(c+\nu_{\theta r}\right)\frac{1}{r}\frac{\partial^3 w(r,\theta,t)}{\partial r^2\partial\theta} + k^2\left(\frac{1}{r^3}\frac{\partial^3 w(r,\theta,t)}{\partial\theta^3} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 w(r,\theta,t)}{\partial r\partial\theta}\right)\right] -$$

$$-c\frac{dD_{11}}{dr}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial^2 w(r,\theta,t)}{\partial r\partial\theta} - \frac{1}{r^2}\frac{\partial w(r,\theta,t)}{\partial\theta}\right),$$

где $D_{11}(r) = \dfrac{E_\theta h^3(r)}{12\left(k^2-\nu_{\theta r}^2\right)}$ – цилиндрическая жесткость изгиба полярно-ортотропной пластины; $c = \dfrac{2\left(k^2-\nu_{\theta r}^2\right)G_{r\theta}}{E_\theta}$; $k^2 = \dfrac{E_\theta}{E_r}$; $E_r, E_\theta$ – модули Юнга при растяжении (сжатии) цилиндрически ортотропного тела в направлении осей $r$ и $\theta$ соответственно; $G_{r\theta}$ – модуль сдвига; $\nu_{\theta r}$ – коэффициент Пуассона.

Подставляя в уравнение (4) выражения для динамических моментов $M_r(r,\theta,t)$, $M_\theta(r,\theta,t)$, $M_{r\theta}(r,\theta,t)$ через функцию динамического прогиба $w(r,\theta,t)$ из (5), получим *основное дифференциальное уравнение несимметричных изгибных колебаний полярно-ортотропной кольцевой пластины переменной толщины, скрепленной с упругим основанием Пастернака*

$$\frac{\partial^4 w}{\partial r^4} + \frac{2\left(c+\nu_{\theta r}\right)}{r^2}\frac{\partial^4 w}{\partial r^2\partial\theta^2} + \frac{k^2}{r^4}\frac{\partial^4 w}{\partial\theta^4} + 2\left(\frac{D'_{11}}{D_{11}} + \frac{1}{r}\right)\frac{\partial^3 w}{\partial r^3} + \frac{2\left(c+\nu_{\theta r}\right)}{r^2}\left(\frac{D'_{11}}{D_{11}} - \frac{1}{r}\right)\frac{\partial^3 w}{\partial r\partial\theta^2} +$$

$$+\left[\frac{D''_{11}}{D_{11}} + \frac{\left(2+\nu_{\theta r}\right)}{r}\frac{D'_{11}}{D_{11}} - \frac{k_1}{D_{11}} - \frac{k^2}{r^2}\right]\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \left[\frac{\nu_{\theta r}}{r^2}\frac{D''_{11}}{D_{11}} - \frac{\left[2\left(c+\nu_{\theta r}\right)+k^2\right]}{r^3}\frac{D'_{11}}{D_{11}} - \frac{k_1}{r^2 D_{11}} +\right.$$

$$\left.+\frac{2\left(c+\nu_{\theta r}+k^2\right)}{r^4}\right]\frac{\partial^2 w}{\partial\theta^2} + \left[\frac{\nu_{\theta r}}{r}\frac{D''_{11}}{D_{11}} - \frac{k^2}{r^2}\frac{D'_{11}}{D_{11}} - \frac{k_1}{rD_{11}} + \frac{k^2}{r^3}\right]\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{k_0}{D_{11}(r)}w +$$

$$+\frac{\left[m_f + \rho h(r)\right]}{D_{11}(r)}\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{q_z(r,\theta,t)}{D_{11}(r)}. \qquad (6)$$

Пусть изгибающая нагрузка изменяется во времени $t$ по гармоническому закону с частотой $\Omega$, не совпадающей с собственными частотами колебаний кольцевой пластины:

$$q_z(r,\theta,t) = q_0(r,\theta)\sin\Omega t,$$

вследствие чего кольцевая пластина будет испытывать *вынужденные нерезонансные несимметричные изгибные колебания.*

Для дальнейшего решения поставленной задачи применим операционное исчисление. Используя интегральное преобразование Лапласа функции динамического прогиба $w(r,\theta,t)$ и интенсивности изгибающей нагрузки $q_z(r,\theta,t)$ по переменной $t$, перейдем от оригиналов этих функций к их изображениям:

$$w(r,\theta,t) \fallingdotseq \widehat{W}(r,\theta,p);\ q_z(r,\theta,t) = q_0\sin\Omega t \fallingdotseq \widehat{q}_z(r,\theta,p) = q_0(r,\theta)\frac{\Omega}{\left(p^2+\Omega^2\right)}.$$

Здесь предполагается, что функция динамического прогиба $w(r, \theta, t)$ имеет оригинал по временной переменной $t$ [5].

Тогда уравнение (6) для изображений будет иметь следующий вид:

$$\frac{\partial^4 \widehat{W}}{\partial r^4}+\frac{2\left(c+\nu_{\theta r}\right)}{r^2}\frac{\partial^4 \widehat{W}}{\partial r^2\partial\theta^2}+\frac{k^2}{r^4}\frac{\partial^4 \widehat{W}}{\partial\theta^4}+2\left(\frac{D'_{11}}{D_{11}}+\frac{1}{r}\right)\frac{\partial^3 \widehat{W}}{\partial r^3}+\frac{2\left(c+\nu_{\theta r}\right)}{r^2}\left(\frac{D'_{11}}{D_{11}}-\frac{1}{r}\right)\frac{\partial^3 \bar{W}}{\partial r\partial\theta^2}+$$

$$+\left[\frac{D''_{11}}{D_{11}}+\frac{\left(2+\nu_{\theta r}\right)}{r}\frac{D'_{11}}{D_{11}}-\frac{k_1}{D_{11}}-\frac{k^2}{r^2}\right]\frac{\partial^2 \widehat{W}}{\partial r^2}+\left[\frac{\nu_{\theta r}}{r^2}\frac{D''_{11}}{D_{11}}-\frac{\left[2\left(c+\nu_{\theta r}\right)+k^2\right]}{r^3}\frac{D'_{11}}{D_{11}}-\frac{k_1}{r^2 D_{11}}+\right.$$

$$\left.+\frac{2\left(c+\nu_{\theta r}+k^2\right)}{r^4}\right]\frac{\partial^2 \widehat{W}}{\partial\theta^2}+\left[\frac{\nu_{\theta r}}{r}\frac{D''_{11}}{D_{11}}-\frac{k^2}{r^2}\frac{D'_{11}}{D_{11}}-\frac{k_1}{rD_{11}}+\frac{k^2}{r^3}\right]\frac{\partial \widehat{W}}{\partial r}+\frac{\left[k_0+\left(m_f+\rho h(r)\right)p^2\right]}{D_{11}(r)}\widehat{W}=$$

$$=\frac{q_0(r,\theta)}{D_{11}(r)}\frac{\Omega}{\left(p^2+\Omega^2\right)}. \qquad (7)$$

При выводе уравнения (7) были учтены однородные начальные условия: $w(r, 0) = 0,\ \frac{\partial w(r,t)}{\partial t}|_{t=0}=0.$

Представим изображение $\widehat{W}(r,\theta,p)$ функции динамического прогиба пластины и поперечную нагрузку $q_0(r,\theta)$ в виде следующих рядов Фурье по окружной переменной $\theta$:

$$\widehat{W}(r,\theta,p)=\widehat{W}_0(r,p)+\sum_{n=1}^{\infty}\widehat{W}_n^{(1)}(r,p)\cos n\theta+\sum_{n=1}^{\infty}\widehat{W}_n^{(2)}(r,p)\sin n\theta, \qquad (8)$$

$$q_0(r,\theta)=q_0^{(0)}(r)+\sum_{n=1}^{\infty}q_n^{(1)}(r)\cos n\theta+\sum_{n=1}^{\infty}q_n^{(2)}(r)\sin n\theta.$$

Первое слагаемое в разложении (8) для изображения $\widehat{W}(r,\theta,p)$ функции динамического прогиба учитывает его осесимметричную составляющую. Слагаемые, содержащие $\cos n\theta$, соответствуют симметричным составляющим изображения $\widehat{W}(r,\theta,p)$ относительно плоскости $\theta=0$, а слагаемые, содержащие $\sin n\theta$, – обратно симметричным.

Подставляя разложения (8) в уравнение (7), получим бесконечную систему обыкновенных дифференциальных уравнений 4-го порядка для изображений радиальных функций $\widehat{W}_0(r,p),\ \widehat{W}_n^{(i)}(r,p)$ $(i=1,2)$:

$(n = 0)$

$$\frac{d^4\widehat{W}_0}{dr^4}+2\left(\frac{D'_{11}}{D_{11}}+\frac{1}{r}\right)\frac{d^3\widehat{W}_0}{dr^3}+\left[\frac{D''_{11}}{D_{11}}+\frac{\left(2+\nu_{\theta r}\right)}{r}\frac{D'_{11}}{D_{11}}-\frac{k_1}{D_{11}}-\frac{k^2}{r^2}\right]\frac{d^2\widehat{W}_0}{dr^2}+$$

$$+\left[\frac{\nu_{\theta r}}{r}\frac{D''_{11}}{D_{11}}-\frac{k^2}{r^2}\frac{D'_{11}}{D_{11}}-\frac{k_1}{rD_{11}}+\frac{k^2}{r^3}\right]\frac{d\widehat{W}_0}{dr}+\frac{\left[k_0+\left(m_f+\rho h(r)\right)p^2\right]}{D_{11}(r)}\widehat{W}_0=\frac{q_0^{(0)}(r)}{D_{11}(r)}\frac{\Omega}{\left(p^2+\Omega^2\right)}; \qquad (9)$$

$(n = 1, 2, 3, \ldots)$

$$\frac{d^4\widehat{W}_n^{(i)}}{dr^4}+2\left(\frac{D'_{11}}{D_{11}}+\frac{1}{r}\right)\frac{d^3\widehat{W}_n^{(i)}}{dr^3}+\left[\frac{D''_{11}}{D_{11}}+\frac{\left(2+\nu_{\theta r}\right)}{r}\frac{D'_{11}}{D_{11}}-\frac{k_1}{D_{11}}-\frac{\left[2\left(c+\nu_{\theta r}\right)n^2+k^2\right]}{r^2}\right]\frac{d^2\bar{W}_n^{(i)}}{dr^2}+$$

$$+\left[\frac{\nu_{\theta r}}{r}\frac{D''_{11}}{D_{11}}-\frac{\left[2\left(c+\nu_{\theta r}\right)n^2+k^2\right]}{r^2}\frac{D'_{11}}{D_{11}}-\frac{k_1}{rD_{11}}+\frac{\left[2\left(c+\nu_{\theta r}\right)n^2+k^2\right]}{r^3}\right]\frac{d\widehat{W}_n^{(i)}}{dr}-$$

$$-\left\{n^2\frac{\nu_{\theta r}}{r^2}\frac{D''_{11}}{D_{11}}-n^2\frac{\left[2\left(c+\nu_{\theta r}\right)+k^2\right]}{r^3}\frac{D'_{11}}{D_{11}}+n^2\frac{\left[2\left(c+\nu_{\theta r}+k^2\right)-k^2n^2\right]}{r^4}-\right.$$

$$\left.-\left[k_0+\left(m_f+\rho h(r)\right)p^2-\frac{n^2}{r^2}k_1\right]\frac{1}{D_{11}}\right\}\widehat{W}_n^{(i)}=\frac{q_n^{(i)}(r)}{D_{11}(r)}\frac{\Omega}{\left(p^2+\Omega^2\right)}. \qquad (10)$$

Представим дифференциальные уравнения (9), (10) в следующем виде:
($n = 0$)

$$\frac{d^4\widehat{W}_0}{dr^4} + a^{(1)}(r)\frac{d^3\widehat{W}_0}{dr^3} + a_n^{(2)}(r)\frac{d^2\widehat{W}_0}{dr^2} + 2a_n^{(3)}(r)\frac{d\widehat{W}_0}{dr} + 6a_n^{(4)}(r,p)\widehat{W}_0 = \frac{q_0^{(0)}(r)}{D_{11}(r)}\frac{\Omega}{\left(p^2+\Omega^2\right)}, \qquad (11)$$

($n = 1, 2, 3\ldots$ .)

$$\frac{d^4\widehat{W}_n^{(i)}}{dr^4} + a^{(1)}(r)\frac{d^3\widehat{W}_n^{(i)}}{dr^3} + a_n^{(2)}(r)\frac{d^2\widehat{W}_n^{(i)}}{dr^2} + 2a_n^{(3)}(r)\frac{d\widehat{W}_n^{(i)}}{dr} + 6a_n^{(4)}(r,p)\widehat{W}_n^{(i)} = \frac{q_n^{(i)}(r)}{D_{11}(r)}\frac{\Omega}{\left(p^2+\Omega^2\right)}, \qquad (12)$$

где $a^{(1)}(r) = 2\left(\frac{D'_{11}}{D_{11}} + \frac{1}{r}\right)$; $a_n^{(2)}(r) = \left[\frac{D''_{11}}{D_{11}} + \frac{\left(2+\nu_{\theta r}\right)}{r}\frac{D'_{11}}{D_{11}} - \frac{k_1}{D_{11}} - \frac{\left[2\left(c+\nu_{\theta r}\right)n^2+k^2\right]}{r^2}\right]$;

$$a_n^{(3)}(r) = \frac{1}{2}\left[\frac{\nu_{\theta r}}{r}\frac{D''_{11}}{D_{11}} - \frac{\left[2\left(c+\nu_{\theta r}\right)n^2+k^2\right]}{r^2}\frac{D'_{11}}{D_{11}} - \frac{k_1}{rD_{11}} + \frac{\left[2\left(c+\nu_{\theta r}\right)n^2+k^2\right]}{r^3}\right];$$

$$a_n^{(4)}(r,p) = -\frac{1}{6}\left\{n^2\frac{\nu_{\theta r}}{r^2}\frac{D''_{11}}{D_{11}} - n^2\frac{\left[2\left(c+\nu_{\theta r}\right)+k^2\right]}{r^3}\frac{D'_{11}}{D_{11}} + n^2\frac{\left[2\left(c+\nu_{\theta r}+k^2\right)-k^2n^2\right]}{r^4} - \right.$$

$$\left. -\left[k_0 + \left(m_f + \rho h(r)\right)p^2 + \frac{n^2}{r^2}k_1\right]\frac{1}{D_{11}}\right\}.$$

Сведем задачи решения дифференциальных уравнений (11), (12) к решениям соответствующих линейных интегральных уравнений Вольтерры 2-го рода. Полагаем

$$\frac{d^4\widehat{W}_0(r,p)}{dr^4} = \widehat{d}_0(r,p), \quad \frac{d^4W_n^{(i)}(r,p)}{dr^4} = \widehat{d}_n^{(i)}(r,p). \qquad (13)$$

Последовательно интегрируя выражения (13), получим

$$\frac{d^3\widehat{W}_0(r,p)}{dr^3} = \int_{r_0}^{r}\widehat{d}_0(s,p)ds + \dddot{\widehat{W}}_0\left(r_0,p\right),$$

$$\frac{d^2\widehat{W}_0(r,p)}{dr^2} = \int_{r_0}^{r}(r-s)\widehat{d}_0(s,p)ds + \dddot{\widehat{W}}_0\left(r_0,p\right)\left(r-r_0\right) + \ddot{\widehat{W}}_0\left(r_0,p\right),$$

$$\frac{d\widehat{W}_0(r,p)}{dr} = \frac{1}{2}\int_{r_0}^{r}(r-s)^2\widehat{d}_0(s,p)ds + \frac{1}{2}\dddot{\widehat{W}}_0\left(r_0,p\right)\left(r-r_0\right)^2 + \ddot{\widehat{W}}_0\left(r_0,p\right)\left(r-r_0\right) + \dot{\widehat{W}}_0\left(r_0,p\right),$$

$$\widehat{W}_0(r,p) = \frac{1}{6}\int_{r_0}^{r}(r-s)^3\widehat{d}_0(s,p)ds + \frac{1}{6}\dddot{\widehat{W}}_0\left(r_0,p\right)\left(r-r_0\right)^3 + \frac{1}{2}\ddot{\widehat{W}}_0\left(r_0,p\right)\left(r-r_0\right)^2 +$$

$$+\dot{\widehat{W}}_0\left(r_0,p\right)\left(r-r_0\right) + \widehat{W}_0\left(r_0,p\right),$$

$$\frac{d^3\widehat{W}_n^{(i)}(r,p)}{dr^3} = \int_{r_0}^{r}\widehat{d}_n^{(i)}(s,p)ds + \dddot{\widehat{W}}_n^{(i)}\left(r_0,p\right), \qquad (14)$$

$$\frac{d^2\widehat{W}_n^{(i)}(r,p)}{dr^2} = \int_{r_0}^{r}(r-s)\widehat{d}_n^{(i)}(s,p)ds + \dddot{\widehat{W}}_n^{(i)}\left(r_0,p\right)\left(r-r_0\right) + \ddot{\widehat{W}}_n^{(i)}\left(r_0,p\right),$$

$$\frac{d\widehat{W}_n^{(i)}(r,p)}{dr} = \frac{1}{2}\int_{r_0}^{r}(r-s)^2\widehat{d}_n^{(i)}(s,p)ds + \frac{1}{2}\dddot{\widehat{W}}_n^{(i)}\left(r_0,p\right)\left(r-r_0\right)^2 + \ddot{\widehat{W}}_n^{(i)}\left(r_0,p\right)\left(r-r_0\right) + \dot{\widehat{W}}_n^{(i)}\left(r_0,p\right),$$

$$\widehat{W}_n^{(i)}(r,p) = \frac{1}{6}\int_{r_0}^{r}(r-s)^3\widehat{d}_n^{(i)}(s,p)ds + \frac{1}{6}\dddot{\widehat{W}}_n^{(i)}\left(r_0,p\right)\left(r-r_0\right)^3 + \frac{1}{2}\ddot{\widehat{W}}_n^{(i)}\left(r_0,p\right)\left(r-r_0\right)^2 +$$

$$+\dot{\widehat{W}}_n^{(i)}\left(r_0,p\right)\left(r-r_0\right) + \widehat{W}^{(i)}\left(r_0,p\right).$$

Здесь использовалось известное тождество Дирихле [6]

$$\underbrace{\int_{r_0}^{r} dr_1 \int_{r_0}^{r_1} dr_2 \ldots \int_{r_0}^{r_{n-1}} f(r_n)\, dr_n}_{n} = \frac{1}{(n-1)!}\int_{r_0}^{r} (r-s)^{n-1} f(s)ds.$$

Подставим в дифференциальные уравнения (11), (12) вместо изображений $\widehat{W}_0(r,p), \widehat{W}_n^{(i)}(r,p)$ радиальных функций и их производных правые части выражений (13), (14). В результате получим линейные интегральные уравнения Вольтерры 2-го рода:

$$\widehat{d}_0(r,p) = \lambda \int_{r_0}^{r} \widehat{K}_0(r,s,p)\widehat{d}_0(s,p)ds + \widehat{g}_0(r,p),$$

$$\widehat{d}_n^{(i)}(r,p) = \lambda \int_{r_0}^{r} \widehat{K}_n(r,s,p)\widehat{d}_n^{(i)}(s,p)ds + \widehat{g}_n^{(i)}(r,p), \tag{15}$$

где числовые параметры: $\lambda = -1$; $n \in Z_+$; $i = 1, 2$;
$\widehat{K}_n(r,s,p) = \left[ a^{(1)}(r) + a_n^{(2)}(r)(r-s) + a_n^{(3)}(r)(r-s)^2 + a_n^{(4)}(r,p)(r-s)^3 \right]$ – ядра интегральных уравнений; $\widehat{g}_0(r,p), \widehat{g}_n^{(i)}(r,p)$ – свободные члены интегральных уравнений, имеющие вид

$$\widehat{g}_0(r,p) = \frac{\partial^3 \widehat{K}_0(r,r_0,p)}{\partial s^3}\widehat{W}_0(r_0,p) - \frac{\partial^2 \widehat{K}_0(r,r_0,p)}{\partial s^2}\dot{\widehat{W}}_0(r_0,p) + \frac{\partial \widehat{K}_0(r,r_0,p)}{\partial s}\ddot{\widehat{W}}_0(r_0,p) -$$
$$-\widehat{K}_0(r,r_0,p)\dddot{\widehat{W}}_0(r_0,p) + \frac{q_0^{(0)}(r)}{D_{11}(r)}\frac{\Omega}{\left(p^2+\Omega^2\right)},$$

$$\widehat{g}_n^{(i)}(r,p) = \frac{\partial^3 \widehat{K}_n(r,r_0,p)}{\partial s^3}\widehat{W}_n^{(i)}(r_0,p) - \frac{\partial^2 \widehat{K}_n(r,r_0,p)}{\partial s^2}\dot{\widehat{W}}_n^{(i)}(r_0,p) + \frac{\partial \widehat{K}_n(r,r_0,p)}{\partial s}\ddot{\widehat{W}}_n^{(i)}(r_0,p) -$$
$$-\widehat{K}_n(r,r_0,p)\dddot{\widehat{W}}_n^{(i)}(r_0,p) + \frac{q_n^{(i)}(r)}{D_{11}(r)}\frac{\Omega}{\left(p^2+\Omega^2\right)}.$$

Здесь введены обозначения: $\dfrac{\partial^l \widehat{K}_n(r,r_0,p)}{\partial s^l} = \dfrac{\partial^l \widehat{K}_n(r,s,p)}{\partial s^l}\Big|_{s=r_0}$ $(l = 1, 2, 3)$.

Так, при изменении толщины $h(r)$ кольцевой пластины по степенному закону

$$h(r) = h_0\left(\frac{r}{r_0}\right)^{\alpha}, \ \alpha \in R,$$

ядра $\widehat{K}_n(r,s,p)$ интегральных уравнений (15) имеют вид

$$\widehat{K}_n(r,s,p) = \left\{\left[\frac{\left(A^{(1)}+A_n^{(2)}+A_n^{(3)}+A_n^{(4)}\right)}{r} + \frac{\rho h_0 p^2}{6D_0}\frac{r_0^{2\alpha}}{r^{2\alpha-3}} + \frac{(n^2-1)k_1}{6D_0}\frac{r_0^{3\alpha}}{r^{3\alpha-1}} + \frac{\left(k_0+m_f p^2\right)}{6D_0}\frac{r_0^{3\alpha}}{r^{3\alpha-3}}\right] - \right.$$
$$-\left[\frac{\left(A_n^{(2)}+2A_n^{(3)}+3A_n^{(4)}\right)}{r^2} + \frac{\rho h_0 p^2}{2D_0}\frac{r_0^{2\alpha}}{r^{2\alpha-2}} + \frac{(n^2-4)k_1}{2D_0}\frac{r_0^{3\alpha}}{r^{3\alpha}} + \frac{\left(k_0+m_f p^2\right)}{2D_0}\frac{r_0^{3\alpha}}{r^{3\alpha-2}}\right]s +$$
$$+\left[\frac{\left(A_n^{(3)}+3A_n^{(4)}\right)}{r^3} + \frac{\rho h_0 p^2}{2D_0}\frac{r_0^{2\alpha}}{r^{2\alpha-1}} + \frac{(n^2-1)k_1}{2D_0}\frac{r_0^{3\alpha}}{r^{3\alpha+1}} + \frac{\left(k_0+m_f p^2\right)}{2D_0}\frac{r_0^{3\alpha}}{r^{3\alpha-1}}\right]s^2 -$$
$$\left. -\left(\frac{A_n^{(4)}}{r^4} + \frac{\rho h_0 p^2}{6D_0}\frac{r_0^{2\alpha}}{r^{2\alpha}} + \frac{n^2 k_1}{6D_0}\frac{r_0^{3\alpha}}{r^{3\alpha+2}} + \frac{\left(k_0+m_f p^2\right)}{6D_0}\frac{r_0^{3\alpha}}{r^{3\alpha}}\right)s^3\right\},$$

где $A^{(1)} = 2(3\alpha+1)$, $A_n^{(2)} = \left\{3\alpha(3\alpha+1) + \left[\left(3\alpha\nu_{\theta k} - k^2\right) - 2\left(c+\nu_{\theta r}\right)n^2\right]\right\}$,

$$A_n^{(3)} = \frac{1}{2}(3\alpha - 1)\left[\left(3\alpha\nu_{\theta r} - k^2\right) - 2\left(c + \nu_{\theta r}\right)n^2\right],$$

$$A_n^{(4)} = -\frac{n^2}{6}\left\{(3\alpha - 1)\left[\left(3\alpha\nu_{\theta r} - k^2\right) - 2\left(c + \nu_{\theta r}\right)\right] - \left(n^2 - 1\right)k^2\right\}, \; D_0 = \frac{E_\theta h_0^3}{12\left(k^2 - \nu_{\theta r}^2\right)}.$$

Общие решения линейных интегральных уравнений Вольтерры 2-го рода (14) записываются с помощью *резольвенты* $\hat{R}_n(r,s,p;\lambda)$ в виде [6, 7]

$$\begin{aligned} \hat{d}_0(r,p) &= \lambda\int_{r_0}^{r} \hat{R}_0(r,s,p;\lambda)\hat{g}_0(s,p)ds + \hat{g}_0(r,p), \\ \hat{d}_n^{(i)}(r,p) &= \lambda\int_{r_0}^{r} \hat{R}_n(r,s,p;\lambda)\hat{g}_n^{(i)}(s,p)ds + \hat{g}_n^{(i)}(r,p). \end{aligned} \qquad (16)$$

Здесь функция $\hat{R}_n(r,s,p;\lambda)$ определяется функциональным рядом

$$\hat{R}_n(r,s,p;\lambda) = \sum_{m=0}^{\infty} \lambda^m \hat{K}_{m+1}^{(n)}(r,s,p),$$

который для непрерывных ядер $\hat{K}_n(r,s,p)$ сходится абсолютно и равномерно.

*Повторяющиеся* или *итерированные ядра* $\hat{K}_m^{(n)}(r,s,p)$ определяются по следующим рекуррентным формулам:

$$\hat{K}_1^{(n)}(r,s,p) = \hat{K}_n(r,s,p),$$

$$\hat{K}_2^{(n)}(r,s,p) = \int_s^r \hat{K}_n(r,t,p)\hat{K}_1^{(n)}(t,s,p)dt,$$

……………………………………..

$$\hat{K}_m^{(n)}(r,s,p) = \int_s^r \hat{K}_n(r,t,p)\hat{K}_{m-1}^{(n)}(t,s,p)dt.$$

Если свободные члены $\hat{g}_0(r,p)$, $\hat{g}_n^{(i)}(r,p)$ непрерывны в $[r_0,R]$, а ядра $\hat{K}_n(r,s,p)$ непрерывны при $r_0 \le r \le R$, $r_0 \le s \le r$, то линейные интегральные уравнения Вольтерры 2-го рода (15) имеют при любом параметре $\lambda\ (\lambda \ne 0)$ единственные непрерывные решения, определяемые формулами (16).

Отметим, что интегральные уравнения Вольтерры 2-го рода можно решать и другими аналитическими и численными методами, указанными, например, в работе [7].

Предположим, что каждая из динамических функций $M_r(r,\theta,t)$, $M_\theta(r,\theta,t)$, $M_{r\theta}(r,\theta,t)$, $Q_r(r,\theta,t)$, $Q_\theta(r,\theta,t)$ рассматриваемой задачи имеет свои оригиналы по временной переменной $t$ и, следовательно, имеет свои изображения.

Разложим изображения $\hat{M}_r(r,\theta,p)$, $\hat{M}_\theta(r,\theta,p)$ динамических изгибающих моментов, изображения $\hat{M}_{r\theta}(r,\theta,p) = \hat{M}_{\theta r}(r,\theta,p)$ динамических крутящих моментов и изображения $\hat{Q}_r(r,\theta,p)$, $\hat{Q}_\theta(r,\theta,p)$ динамических поперечных усилий в следующие ряды Фурье по окружной переменной $\theta$:

$$\hat{M}_r(r,\theta,p) = \hat{M}_r^{(0)}(r,p) + \sum_{n=1}^{\infty}\hat{M}_{r,n}^{(1)}(r,p)\cos n\theta + \sum_{n=1}^{\infty}\hat{M}_{r,n}^{(2)}(r,p)\sin n\theta,$$

$$\hat{M}_\theta(r,\theta,p) = \hat{M}_\theta^{(0)}(r,p) + \sum_{n=1}^{\infty}\hat{M}_{\theta,n}^{(1)}(r,p)\cos n\theta + \sum_{n=1}^{\infty}\hat{M}_{\theta,n}^{(2)}(r,p)\sin n\theta,$$

$$\hat{M}_{r\theta}(r,\theta,p) = \hat{M}_{\theta r}^{(0)}(r,\theta,p) = \sum_{n=1}^{\infty}\hat{M}_{r\theta,n}^{(1)}(r,p)\sin n\theta + \sum_{n=1}^{\infty}\hat{M}_{r\theta,n}^{(2)}(r,p)\cos n\theta,$$

$$\hat{Q}_r(r,\theta,p) = \hat{Q}_r^{(0)}(r,p) + \sum_{n=1}^{\infty}\hat{Q}_{r,n}^{(1)}(r,p)\cos n\theta + \sum_{n=1}^{\infty}\hat{Q}_{r,n}^{(2)}(r,p)\sin n\theta,$$

$$\hat{Q}_\theta(r,\theta,p) = \sum_{n=1}^{\infty}\hat{Q}_{\theta,n}^{(1)}(r,p)\sin n\theta + \sum_{n=1}^{\infty}Q_{\theta,n}^{(2)}(r,p)\cos n\theta.$$

Здесь изображения $\widehat{M}_r^{(0)}(r,p)$, $\widehat{M}_{r,n}^{(i)}(r,p)$, $\widehat{M}_\theta^{(0)}(r,p)$, $\widehat{M}_{\theta,n}^{(i)}(r,p)$, $\widehat{M}_{r\theta,n}^{(i)}(r,p)$, $\widehat{Q}_r^{(0)}(r,p)$, $\widehat{Q}_{r,n}^{(i)}(r,p)$, $\widehat{Q}_{\theta,n}^{(i)}(r,p)$ выражаются через изображения $\widehat{d}_0(r,p)$, $\widehat{d}_n^{(i)}(r,p)$ по формулам

$$\widehat{M}_r^{(0)}(r,p) = -D_{11}(r)\left[\int_{r_0}^{r} K_{M_r}^{(0)}(r,s)\widehat{d}_0(s,p)ds + K_{M_r}^{(0)}(r,r_0)\dddot{\widehat{W}}_0(r_0,p) - \right.$$

$$\left. -\frac{\partial K_{M_r}^{(0)}(r,r_0)}{\partial s}\ddot{\widehat{W}}_0(r_0,p) + \frac{\partial^2 K_{M_r}^{(0)}(r,r_0)}{\partial s^2}\dot{\widehat{W}}_0(r_0,p)\right],$$

$$\widehat{M}_{r,n}^{(i)}(r,p) = -D_{11}(r)\left[\int_{r_0}^{r} K_{M_r}^{(n)}(r,s)\widehat{d}_n^{(i)}(s,p)ds + K_{M_r}^{(n)}(r,r_0)\dddot{\widehat{W}}_n^{(i)}(r_0,p) - \right.$$

$$\left. -\frac{\partial K_{M_r}^{(n)}(r,r_0)}{\partial s}\ddot{\widehat{W}}_n^{(i)}(r_0,p) + \frac{\partial^2 K_{M_r}^{(n)}(r,r_0)}{\partial s^2}\dot{\widehat{W}}_n^{(i)}(r_0,p) - \frac{\partial^3 K_{M_r}^{(n)}(r,r_0)}{\partial s^3}\widehat{W}_n^{(i)}(r_0,p)\right],$$

$$\widehat{M}_\theta^{(0)}(r,p) = -D_{11}(r)\left[\int_{r_0}^{r} K_{M_\theta}^{(0)}(r,s)\widehat{d}_0(s,p)ds + K_{M_\theta}^{(0)}(r,r_0)\dddot{\widehat{W}}_0(r_0,p) - \right.$$

$$\left. -\frac{\partial K_{M_\theta}^{(0)}(r,r_0)}{\partial s}\ddot{\widehat{W}}_0(r_0,p) + \frac{\partial^2 K_{M_\theta}^{(0)}(r,r_0)}{\partial s^2}\dot{\widehat{W}}_0(r_0,p)\right],$$

$$\widehat{M}_{\theta,n}^{(i)}(r,p) = -D_{11}(r)\left[\int_{r_0}^{r} K_{M_\theta}^{(n)}(r,s)\widehat{d}_n^{(i)}(s,p)ds + K_{M_\theta}^{(n)}(r,r_0)\dddot{\widehat{W}}_n^{(i)}(r_0,p) - \right.$$

$$\left. -\frac{\partial K_{M_\theta}^{(n)}(r,r_0)}{\partial s}\ddot{\widehat{W}}_n^{(i)}(r_0,p) + \frac{\partial^2 K_{M_\theta}^{(n)}(r,r_0)}{\partial s^2}\dot{\widehat{W}}_n^{(i)}(r_0,p) - \frac{\partial^3 K_{M_\theta}^{(n)}(r,r_0)}{\partial s^3}\widehat{W}_n^{(i)}(r_0,p)\right],$$

$$\widehat{M}_{r\theta,n}^{(i)}(r,p) = (-1)^{i-1}D_{11}(r)\left[\int_{r_0}^{r} K_{M_{r\theta}}^{(n)}(r,s)\widehat{d}_n^{(i)}(s,p)ds + K_{M_{r\theta}}^{(n)}(r,r_0)\dddot{\widehat{W}}_n^{(i)}(r_0,p) - \right.$$

$$\left. -\frac{\partial K_{M_{r\theta}}^{(n)}(r,r_0)}{\partial s}\ddot{\widehat{W}}_n^{(i)}(r_0,p) + \frac{\partial^2 K_{M_{r\theta}}^{(n)}(r,r_0)}{\partial s^2}\dot{\widehat{W}}_n^{(i)}(r_0,p) - \frac{\partial^3 K_{M_{r\theta}}^{(n)}(r,r_0)}{\partial s^3}\widehat{W}_n^{(i)}(r_0,p)\right],$$

$$\widehat{Q}_r^{(0)}(r,p) = -D_{11}(r)\left[\int_{r_0}^{r} K_{Q_r}^{(0)}(r,s)\widehat{d}_0(s,p)ds + K_{Q_r}^{(0)}(r,r_0)\dddot{\widehat{W}}_0(r_0,p) - \right.$$

$$\left. -\frac{\partial K_{Q_r}^{(0)}(r,r_0)}{\partial s}\ddot{\widehat{W}}_0(r_0,p) + \frac{\partial^2 K_{Q_r}^{(0)}(r,r_0)}{\partial s^2}\dot{\widehat{W}}_0(r_0,p)\right],$$

$$\widehat{Q}_{r,n}^{(i)}(r,p) = -D_{11}(r)\left[\int_{r_0}^{r} K_{Q_r}^{(n)}(r,s)\widehat{d}_n^{(i)}(s,p)ds + K_{Q_r}^{(n)}(r,r_0)\dddot{\widehat{W}}_n^{(i)}(r_0,p) - \right.$$

$$\left. -\frac{\partial K_{Q_r}^{(n)}(r,r_0)}{\partial s}\ddot{\widehat{W}}_n^{(i)}(r_0,p) + \frac{\partial^2 K_{Q_r}^{(n)}(r,r_0)}{\partial s^2}\dot{\widehat{W}}_n^{(i)}(r_0,p) - \frac{\partial^3 K_{Q_r}^{(n)}(r,r_0)}{\partial s^3}\widehat{W}_n^{(i)}(r_0,p)\right],$$

$$\widehat{Q}_{\theta,n}^{(i)}(r,p) = (-1)^{i-1}D_{11}(r)\left[\int_{r_0}^{r} K_{Q_\theta}^{(n)}(r,s)\widehat{d}_n^{(i)}(s,p)ds + K_{Q_\theta}^{(n)}(r,r_0)\dddot{\widehat{W}}_n^{(i)}(r_0,p) - \right.$$

$$\left. -\frac{\partial K_{Q_\theta}^{(n)}(r,r_0)}{\partial s}\ddot{\widehat{W}}_n^{(i)}(r_0,p) + \frac{\partial^2 K_{Q_\theta}^{(n)}(r,r_0)}{\partial s^2}\dot{\widehat{W}}_n^{(i)}(r_0,p) - \frac{\partial^3 K_{Q_\theta}^{(n)}(r,r_0)}{\partial s^3}\widehat{W}_n^{(i)}(r_0,p)\right],$$

где передаточные (весовые) функции имеют вид

$$K_{M_r}^{(0)}(r,s)=\left[1+\nu_{\theta r}\frac{(r-s)}{2r}\right](r-s),\ \ K_{M_r}^{(n)}(r,s)=\left[1+\nu_{\theta r}\frac{(r-s)}{2r}-n^2\nu_{\theta r}\frac{(r-s)^2}{6r^2}\right](r-s);$$

$$K_{M_\theta}^{(0)}(r,s)=\left[\nu_{\theta r}+k^2\frac{(r-s)}{2r}\right](r-s),\ \ K_{M_\theta}^{(n)}(r,s)=\left[\nu_{\theta r}+k^2\frac{(r-s)}{2r}-n^2k^2\frac{(r-s)^2}{6r^2}\right](r-s);$$

$$K_{M_{r\theta}}^{(n)}(r,s)=nc\left[\frac{(r-s)^2}{2r}-\frac{(r-s)^3}{6r^2}\right];\ K_{Q_r}^{(0)}(r,s)=\left[1+\left(\frac{D'_{11}}{D_{11}}+\frac{1}{r}\right)(r-s)+\left(\nu_{\theta r}\frac{D'_{11}}{D_{11}}-\frac{k^2}{r}\right)\frac{(r-s)^2}{2r}\right],$$

$$K_{Q_r}^{(n)}(r,s)=\left[1+\left(\frac{D'_{11}}{D_{11}}+\frac{1}{r}\right)(r-s)+\left(\nu_{\theta r}\frac{D'_{11}}{D_{11}}-\frac{\left[\left(c+\nu_{\theta r}\right)n^2+k^2\right]}{r}\right)\frac{(r-s)^2}{2r}-\right.$$

$$\left.-n^2\left(\nu_{\theta r}\frac{D'_{11}}{D_{11}}-\frac{\left[\left(c+\nu_{\theta r}\right)+k^2\right]}{r}\right)\frac{(r-s)^3}{6r^2}\right];$$

$$K_{Q_\theta}^{(n)}(r,s)=n\left[\frac{\left(c+\nu_{\theta r}\right)}{r}+\left(c\frac{D'_{11}}{D_{11}}+\frac{k^2}{r}\right)\frac{(r-s)}{2r}-\left(c\frac{D'_{11}}{D_{11}}+\frac{n^2k^2}{r}\right)\frac{(r-s)^2}{6r^2}\right](r-s).$$

Изображения $\widehat{W}_0(r_0,p)$, $\dot{\widehat{W}}_0(r_0,p)$, $\ddot{\widehat{W}}_0(r_0,p)$, $\dddot{\widehat{W}}_0(r_0,p)$, $\widehat{W}_n^{(i)}(r_0,p)$, $\dot{\widehat{W}}_n^{(i)}(r_0,p)$, $\ddot{\widehat{W}}_n^{(i)}(r_0,p)$, $\dddot{\widehat{W}}_n^{(i)}(r_0,p)$ радиальных функций динамического прогиба и его производных на внутреннем контуре кольцевой пластины определяются из граничных условий на контурах диска:

1) если внутренний и/или внешний контур диска жестко заделан или защемлен, то

$$\begin{aligned}&\widehat{W}_0(r_i,p)=0, \quad \dot{\widehat{W}}_0(r_i,p)=0;\\ &\widehat{W}_n^{(i)}(r_i,p)=0, \ \dot{\widehat{W}}_n^{(i)}(r_i,p)=0,\end{aligned}\quad (i=1,2)$$

где $r_1=r_0$, $r_2=R$;

2) для шарнирно опертого края диска

$$\widehat{W}_0(r_i,p)=0, \qquad \widehat{M}_r^{(0)}(r_i,p)=0;$$

$$\widehat{W}_n^{(i)}(r_i,p)=0, \qquad \widehat{M}_{r,n}^{(i)}(r_i,p)=0;$$

3) для свободного края диска

$$\widehat{M}_r^{(0)}(r_i,p)=0, \quad \widehat{Q}_r^{(0)}(r_i,p)=0;$$

$$\widehat{M}_r^{(i)}(r_i,p)=0, \quad \widehat{Q}_{r,n}^{(i)}+(-1)^{i-1}\frac{n}{r_i}\widehat{M}_{r\theta,n}^{(i)}(r_i,p).$$

Для нахождения оригиналов динамических функций рассматриваемой задачи воспользуемся формулой обращения преобразования Лапласа.

Так, например, для найденного изображения $\widehat{W}(r,p)$ радиальной функции динамического перемещения неизвестная оригинал-функция $W(r,t)$ определится интегралом

$$W(r,t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{s-i\omega}^{s+i\omega}\widehat{W}(r,p)e^{pt}dp.$$

Поскольку здесь рассматривается интеграл от аналитической функции по пути интегрирования в комплексной плоскости, то на основании теоремы Коши о вычетах и леммы Жордана получаем [5]

$$W(r,t)=\sum_{k=1}^{n}\underset{p=p_k}{\mathrm{Res}}\,s\widehat{W}(r,p)e^{pt},$$

где оригинал $W(r,t)$ равняется сумме вычетов функции $\widehat{W}(r,p)e^{pt}$; $p_k$ – полюса порядка $m_k$ функции $\widehat{W}(r,p)$.

Если изображение $\widehat{W}(r,p)$ можно представить рядом Лорана

$$\widehat{W}(r,p)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{c_n(r)}{p^{n+1}},$$

сходящимся при $|p| > 0$, то при всех $t > 0$ оригинал функции $W(r, t)$ задается сходящимся степенным рядом:

$$W(r,t)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{c_n(r)}{n!}t^n.$$

Рассмотренные выше аналитические методы обращения преобразования Лапласа не всегда помогают найти оригиналы функций. В этих случаях прибегают к численным методам обращения преобразования Лапласа. Необходимость в них возникает, например, ввиду отсутствия в таблицах оригиналов и изображений исследуемых функций либо вследствие того, что оригинал или изображение представляются сложными выражениями, неудобными для применения формул.

Задачи численного обращения преобразования Лапласа решаются, как правило, методами разложения оригинала-функции в функциональный ряд. Это могут быть разложения в степенной ряд, в ряд по показательным функциям, а также в ряды по ортогональным функциям, в частности по многочленам Чебышева, Лежандра, Якоби и Лагерра. Второе направление численного обращения – это применение квадратурных формул для вычисления интеграла преобразования Лапласа. Более подробно с численными методами обращения преобразования Лапласа можно ознакомиться в работе [8].

Найдя оригиналы динамических функций рассматриваемой задачи, мы можем рассчитать динамические нормальные $\sigma_r(r,\theta,z,t)$, $\sigma_\theta(r,\theta,z,t)$ и касательные $\tau_{r\theta}(r,\theta,z,t)$, $\tau_{rz}(r,\theta,t)$, $\tau_{\theta z}(r,\theta,t)$ напряжения в анизотропной кольцевой пластине на упругом основании Пастернака, возникающие при ее вынужденных нерезонансных несимметричных изгибных колебаниях под действием распределенной поперечной нагрузки $q_z(r,\theta,t)$, гармонически изменяющейся во времени $t$ с частотой $\Omega$:

$$\sigma_r(r,\theta,z,t)=z\frac{12M_r(r,\theta,t)}{h^3(r)},\ \ \sigma_\theta(r,\theta,z,t)=z\frac{12M_\theta(r,\theta,t)}{h^3(r)},$$

$$\tau_{r\theta}(r,\theta,z,t)=z\frac{12M_{r\theta}(r,\theta,t)}{h^3(r)},\ \ \tau_{rz}(r,\theta,t)=\frac{Q_r(r,\theta,t)}{h(r)},\ \ \tau_{\theta z}(r,\theta,t)=\frac{Q_\theta(r,\theta,t)}{h(r)}.$$

Максимум динамических нормальных $\sigma_r(r,\theta,z,t)$, $\sigma_\theta(r,\theta,z,t)$ и касательных $\tau_{r\theta}(r,\theta,z,t)=$ $=\tau_{\theta r}(r,\theta,z,t)$ напряжений достигается на внешних поверхностях пластины при $z=\pm\frac{h}{2}$.

В случае если приложенная поперечная нагрузка внезапно снимается $(q_z=0)$, то имеем задачу о *свободных колебаниях* анизотропной кольцевой пластины на упругом основании Пастернака. Соотнеся найденное решение однородного уравнения (6) с заданным граничным условием, получим *частотные уравнения.* Решая эти уравнения аналитическими или численными методами, найдем спектр *собственных частот* несимметричных колебаний кольцевой пластины переменной толщины, скрепленной с упругим основанием Пастернака. Собственные частоты несимметричных колебаний пластины можно также находить вариационными методами или численно.


БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Власов В. З., Леонтьев Н. И. Балки, плиты, оболочки на упругом основании. М., 1960.
2. Леоненко Д. В. Собственные колебания трехслойных круговых пластин на упругом основании Пастернака : сб. материалов Междунар. науч. конф. молодых ученых «Молодежь в науке» (Минск, 17–20 апр. 2012 г.). Минск, 2012. С. 326–332.
3. Коваленко А. Д. Круглые пластины переменной толщины. М., 1959.
4. Королевич В. В., Медведев Д. Г. Интегральные уравнения Вольтерры 2-го рода в задачах изгиба вращающихся полярно-ортотропных дисков переменной толщины // Вестн. БГУ. Сер. 1, Физика. Математика. Информатика. 2012. № 3. С. 108–116.
5. Диткин В. А., Прудников А. П. Справочник по операционному исчислению. М., 1965.
6. Краснов М. Л., Киселев А. И., Макаренко Г. И. Интегральные уравнения: задачи и примеры с подробными решениями. М., 2007.
7. Верлань А. Ф., Сизиков В. С. Интегральные уравнения: методы, алгоритмы, программы : справ. пособие. Киев, 1986.
8. Крылов В. И., Скобля Н. С. Справочная книга по численному обращению преобразования Лапласа. Минск, 1968.


Поступила в редакцию 27.03.2014.

***Владимир Васильевич Королевич*** – преподаватель Национального педагогического университета им. М. Драгоманова (Прага, Чехия).

***Дмитрий Георгиевич Медведев*** – кандидат физико-математических наук, доцент, декан механико-математического факультета.