

УДК 517.5

ИНТЕГРАЛЬНОЕ ВЕЙВЛЕТ-ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ДЛЯ ФУНКЦИЙ С КОМПАКТНЫМ НОСИТЕЛЕМ И ЕГО СВОЙСТВА

О. В. ДУБРОВИНА

It is considered the integral wavelet transform of functions with compact support and the transform generated by the wavelets with compact support. Acting properties of such a transform in subspaces of continuous functions and the corresponding weighted spaces are investigated.

Интегральное вейвлет-преобразование

$$W^a(b) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \psi\left(\frac{t-a}{b}\right) dt \quad (1)$$

определено на некотором семействе функций $f: K \rightarrow \mathbb{R}(C)$ (малых волн, всплесков, вейвлетов) из $L_2(M)$, обладающих нулевым средним, т.е. $\int f(t) dt = 0$, где $c_0(a)$ — нормирующий множитель, который обычно принимается равным либо $\frac{1}{\sqrt{|a|}}$ либо $\frac{1}{|a|}$ (см. [1]). Данное преобразование ставит в соответствие каждой функции $x \in B_2(K)$ (сигналу) функцию двух переменных (a, b) , играющих роль масштабирующего параметра (масштабного коэффициента) и параметра сдвига (времени) соответственно.

Преобразование (1) наряду с его дискретным аналогом (см., например, [1]) играет важную роль во всевозможных приложениях благодаря, прежде всего, хорошей локализации по частоте f ($f \sim \frac{1}{a}$) и по времени.

Определение (формальное определение вейвлета). Вейвлетом называется функция $\psi: K \rightarrow \mathbb{R}(C)$, удовлетворяющая условиям:

$$1) \quad \int \psi(t) dt = 0, \quad \int |\psi(t)|^2 dt < +\infty,$$

где $\int \psi(t) dt$ — преобразование Фурье функции ψ .

Отсюда, в частности, следует $\int \psi(t) dt = 0$.

Если ψ имеет компактный носитель $\psi: [c, d] \rightarrow \mathbb{R}(C)$, то интегральное вейвлет-преобразование имеет вид

$$W_t(x)(a, b) = \int_{a-c}^{a+b} x(t) \psi\left(\frac{t-a}{b}\right) dt,$$

Keywords: integral wavelet transform, Laplace convolution, Mellin convolution, function spaces

2000 Mathematics Subject Classification: 42C40, 44A35, 45P05

© О. В. Дубровина, 2004.

f

$$Y \leq p(z) e^{-\ast} \leq a = J(p) \int_0^{\infty} x^p dx. \quad (3)$$

Кроме того, связаны между собой свертки Лапласа и Меллина:

$$J_{m-m}(\rho) = J_f(\rho) + \frac{1}{2} \rho^2 \ln \rho, \quad \rho = \rho^0 + \rho^1 + \rho^2 + \dots \quad (4)$$

Отсюда вытекает, что свойства вейвлет-преобразования (2) по переменной b , сформулированные в теоремах 1, 2, могут быть перенесены на отображение $B)$ для фиксированных значений b .

Поскольку формулы (3) и (4) являются достаточно громоздкими, непосредственно исследуем действие преобразования (2) в подпространствах пространства непрерывных функций единообразно по обеим переменным.

Рассмотрим сначала случай, когда сигнал x непрерывен на некотором отрезке $[A, B]$ (т.е. $x \in C\{[A, B]\}$), а вейвлет $\phi \in C^{1,\lambda}([c, d])$. По определению норма в C есть супремум-норма, а норма в $C^{1,\lambda}$ задается равенством

$$|M|_{C^1, L} = \sup_{u \in \mathcal{U}} \|\phi(u)\| + \sup_{u \in \mathcal{U}} \|\phi'(u)\| + \sup_{u \in \mathcal{U}} \|\phi(u)\|$$

Ниже будет показано, что в данном случае $W^{\wedge}a, b \in C^{1,1}([a, \beta] \times [\gamma, \delta])$, где промежутки $[a, \beta]$, $[\gamma, \delta]$ определены выше. Под нормой функции двух переменных $F \in C^{1,1}([a, \beta] \times [\gamma, \delta])$ понимается

$$\begin{aligned} \|F(a, & \&)\|_{c, i, A} = \sup_{(a, b) \in [0, ?] \times [7, 7]} |F(a, b)| + \sup_{(a, b) \in [a/3] \times [7, 7]} \frac{\partial}{\partial \mathbf{b}} F(a, b) + \sup_{(a, b) \in M] \times [7, 7]} \frac{\partial}{\partial a} F(a, b) + \\ + \sup_{(a, b) \in [a, ?] \times [7, 5]} \frac{1}{|b_1 - b_2|^x} & \cdot \sup_{\{a_1, a_2, f_c\} \in [a/3] \times [a, 0] \times [7, 5]} \frac{|f_a F(a_1, b) - f_a F(a_2, b)|}{a_1 - a_2} \end{aligned}$$

Оценим каждое слагаемое нормы. Заметим, что так как $a \in [a, \beta]$, $a > 0$, то в этих оценках можно положить $\cos(a) = 1$:

$$\sup_{j \in G(q, \lambda)} |W^\wedge(a, b)| < \sup_{J \in [A, B]} \int_{t \in [A, B]} |x(t)| \sup_{u \in [c, d]} |\phi\{u\}| & < \|x\|_c M_c^\wedge(B - A);$$

Для оценки четвертого слагаемого нормы рассмотрим

$$\sup_{(a, b) \in M} \frac{ijW^a M}{|b_i - b_2|} \sim \sup_{(a, M)} \frac{1}{|k - b_2|^x} dt <$$

где супремум берется по всем $(0,61,62) \in [a, (3)] \times [7,5] \times [7,5]$.

Аналогично оценим пятое слагаемое

$$\sup_{(a_1, a_2, b)} \frac{1}{|a_1 - a_2|} \sup_{(a_1, a_2, 6)} \left| \frac{b f x(t)}{|a_1 - a_2|^A} \right| < \\ < 26 \|x\|_C \|B - A\| \|\phi\|_C$$

где супремум берется по всем $(a_1, a_2, 6) \in [a, 0] \times [a, (3)] \times [7,5]$, $a \neq 0$.

Таким образом, если $x \in C([A, B])$, $\phi \in C^{1A}([c, d])$, то $B(x) \in C^{1>A}([a, 3] \times [7,5])$ как функция двух переменных.

Если сигнал x имеет компактный носитель, то в окрестности концов отрезка информация о сигнале является неточной. Это автоматически приводит к искажению значений вейвлет-преобразования в окрестности точек, соответствующих концам отрезков изменения параметров a и B . Аналогичная ситуация возникает в случае, когда вейвлет имеет компактный носитель. Более того, в этом случае подынтегральное выражение в (2) имеет поведение, значительно отличающееся от поведения $x(t)$ в этой окрестности. Это приводит к необходимости рассмотрения интегрального вейвлет-преобразования для x и ϕ с компактным носителем в пространствах с весом.

Рассмотрим действие оператора $U\phi(a, B)(x)$ в пространстве $CQ^A(P^A)$, где вес задается формулой $p^{(j)} = \frac{1}{c^j} \frac{1}{(B - a)^j}$, $j = 0, 1$, $0 < c < 1$, причем $\phi \in C_0^\infty(V^0)$, $\phi' \in C_0^\infty(V^1)$, $\phi(A) = \phi(B) = 0$. Для функции двух переменных B соответствующее пространство определяется следующим образом: $p^j(a) = [(a - a)/(3 - a)]^{j+m}$, $p^j(b) = [(6 -$

$$1 \nabla_\phi(a, B)(x) \in C_0^\infty([p^j, s^j]) \quad W^a(a, b) - p^j(a) - p^j(b) \in C_0^\infty([a, (3)] \times [c, 6]),$$

$$\mathcal{L}u_\phi(a, B) - p^j(a) \in C_0^\infty(K/3) \quad x \in C^A \wedge p^j \wedge X M J),$$

$$p \Gamma_\phi(a, B) \cdot \mathcal{L}B \in C^{\{1\}}(p^{1(0)})([b, 7/4] \times c \mathcal{L}^A([7, < 5])).$$

Достаточно рассмотреть поведение преобразования при $B \rightarrow A$. Так как $\phi \in CQ^{1A}(p^{(0)})([a, \theta])$, положим $\phi(B) = \phi(A) = t - b$, $0 < t < 1$, $\phi \in C^{1A}$.

Обозначим

$$\phi = \int_{b - \ell}^b x(t) \text{ipi}(t, a, B) dt.$$

Покажем, что $\|G\|_{C^{0A}([7,5])} \sim \text{Д}^e \sim \text{абсолютная постоянная}$:

$$|G(6 + h) - G(b)| =$$

$$\int_{b - \ell}^b \frac{1}{(H + Y - \ell)} \mathcal{L}(t) \text{ipi}(t, a, b + h) dt = \mathcal{L} / (m \mathcal{L} \mathcal{L} \mathcal{L}) \quad x(t) M t, a, b) dt <$$

$$i \|x\|_C (b + h - AY - (b - AY) \int_A^b \frac{if > l(t, a, b + h)}{(t - (b + h))^{AY}} - \frac{j > i(t, a, b)}{(td - Ay)} dt.$$

Так как $\phi_I(t, a, b) \in C^1$ то $\| \phi_I(t, a, b) \|_{C^1} < \infty$ — А 1 (см., например, [4]). Из неравенства (см., [4])

$$< |\hat{f}|(x-y)y''^{-l}, \quad x > y > 0, \quad p < 1,$$

следует

$$|b + h - Ay - (b - Ay)| \leq |y|h \quad (b \sim Ay)^I, \quad (5)$$

а также

$$\langle N \rangle = 4 \quad \wedge \quad - a J^{-1} \quad (6)$$

Следовательно,

$$|G(b+h)-G(b)|\leqslant |h|cM \quad (b-Ay\sim m|_c o, Jj|(\frac{t\sim(b+h)}{A}-Ay)\rhd Mdt+\Lambda-A^\wedge$$

Интеграл $f|(\frac{A}{a})^{x-\wedge|d,t}$ сходится в точке A при $X- \varphi > -1$. подынтегральное выражение во втором интеграле преобразуем по формуле (6), полученный интеграл сходится при $-d + 1 > -1$, т.е. при $d < 2$, а $\frac{1}{A} \frac{t^{-b}}{a}$ сходится при $-c + A - 1 > -1$, т.е. при $p < A$.

Таким образом, $\|G\|_{C^0([7, <5])} = \sup_{t \in [7, <5]} \|G(t)\|_{L^1(M)}$ — абсолютная постоянная, $d < A$.

Аналогично доказывается, что $\|G\|_{cO, A_p(O)} < \wedge \{ \Phi L c, \wedge \{ \Psi Y \} \}$.

При оценке компонент нормы Wu , соответствующих переменной a , нормирующий множитель $so(a)$ следует рассматривать равным $\overline{Ja}$ или $\bar{a}$. В остальном оценки этих компонент проводятся аналогично. Отсюда вытекает следующий результат.

Теорема 3.

(2) Пусть $x \in C[A, B]$, $\phi \in C^{1,1}([c, d])$, тогда интегральное вейвлет-преобразование (2) $\wedge(a, b) \in C^{1-A}([a/3, x[7, 5])$.

(II) Пусть $x \in C[A, B]$, $\phi \in C^{\wedge X}(p^{\wedge})(\{c, d\})$, $p^{\otimes} = \frac{t-b}{a}$, a , $3 = 0, 1$, $0 < p < 1$, $1/\lambda < X$, тогда интегральное вейвлет-преобразование $W^{\wedge}(a, b) \in Cq^{1, \wedge}([a, (3)^x \times [7, (5)])$.

Литература

1. Чуй К. Введение в вейлеты. М., 2001.
2. Князев П.Н. Интегральные преобразования. Мн., 1969.
3. Gripenberg G., Londen S.-O., Staffans O. Volterra Integral Equations. Encyclopedia of Mathematics and Its Applications. V. 34. Cambridge-London-New York, 1990.
4. Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Мн., 1987.

Белорусский национальный технический университет, г. Минск, Беларусь