БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

УДК 517.5

ПРОХОРОВИЧ
Михаил Александрович

ОБОБЩЕННЫЕ ПРОСТРАНСТВА СОБОЛЕВА НА МЕТРИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВАХ С МЕРОЙ: ТОНКИЕ СВОЙСТВА ФУНКЦИЙ

Автореферат
диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук
по специальности 01.01.01 — математический анализ

Минск, 2009

Работа выполнена в Белорусском государственном университете

Научный руководитель — **Кротов Вениамин Григорьевич,**
доктор физико-математических наук, профессор,
заведующий кафедрой математических методов теории управления механико-математического факультета Белорусского государственного университета.

Официальные оппоненты: **Иванов Валерий Иванович**
доктор физико-математических наук, профессор,
декан механико-математического факультета Тульского государственного университета;

Радыно Александр Яковлевич
кандидат физико-математических наук, доцент,
доцент кафедры теории функций механико-математического факультета Белорусского государственного университета.

Оппонирующая организация — Учреждение образования "Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины".

Защита состоится 11 декабря 2009 г. в 12.00 часов на заседании совета по защите диссертаций Д 02.01.07 при Белорусском государственном университете по адресу: 220030, г. Минск, ул. Ленинградская, 8 (юридический факультет), ауд. 407, тел. (017) 209-57-09.

С диссертацией можно ознакомиться в фундаментальной библиотеке Белорусского государственного университета.

Автореферат разослан "   " ноября 2009 г.

Учёный секретарь
совета по защите диссертаций
доктор физико-математических наук,
профессор Н.В. Лазакович

КРАТКОЕ ВВЕДЕНИЕ

Исходным пунктом исследований, представленных в данной работе, являются две фундаментальные теоремы.

Теорема Лузина о C-свойстве входит сейчас в любой серьезный курс теории функций. Она утверждает, что любая измеримая на $\mathbb{R}^n$ функция u обладает C-свойством — u является непрерывной, если исключить множество сколь угодно малой меры.

Другая классическая теорема — *теорема Лебега* — утверждает, что для любой функции $u \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ почти все точки являются точками Лебега, то есть для почти всех $x \in \mathbb{R}^n$ существует предел интегральных средних (средних Стеклова)

$$\lim_{r \to +0} \frac{1}{\mu(B(x,r))} \int_{B(x,r)} u \, d\mu = u^*(x)$$

и функция u^* эквивалентна u. Важность этого результата, в частности, состоит в том, что он дает естественное определение значений функции $u \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ почти всюду.

Как будут выглядеть эти факты при дополнительной информации о функции? В частности, что можно сказать о размерах исключительного множества Лузина и дополнения ко множеству точек Лебега для более регулярных функций?

Начиная с середины прошлого столетия и до настоящего времени эти вопросы исследовали многие авторы — см. работы А.Кальдерона (A.P.Calderón), Х.Федерера (H.Federer), В.Зимера (W.Ziemer), А.Зигмунда (A.Zygmund), Ф.Лиу (F.C.Liu) Дж.Майкла (J.Michael), Х.Уитни (H.Whitney), Т.Бэгби (T.Bagby), Д.Свансона (D.Swanson), П.Хайлаша (P.Hajłasz), Ю.Киннунена (J.Kinnunen), О.Мартио (O.Martio), В.Латвалы (V.Latvala), Б.Боярского (B.Bojarski), П.Стржелецкого (P.Strzelecki), В.Г.Кротова и других математиков. В основном они были посвящены исследованию свойств функций из пространств Соболева.

В диссертации эти рассматриваются задачи для обобщенных соболевских пространств $W^p_\alpha(X)$, $\alpha > 0$, $1 < p < \infty$, на любом метрическом пространстве X с мерой.

Подчеркнем, что свойства функций, изучаемые в нашей диссертации, зависят от изменения значений функции на множестве меры нуль. В математической литературе такие свойства часто называют "тонкими".

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Связь работы с крупными научными программами и темами

Тема диссертации соответствует приоритетному направлению фундаментальных и прикладных научных исследований Республики Беларусь на 2006–2010 годы "Математические модели и их применение к анализу систем и процессов в природе и обществе". Работа над диссертацией проводилась на кафедре математических методов теории управления в рамках следующих госбюджетных научно-исследовательских работ Белорусского государственного университета:

1. "Анализ функций и отображений на метрических пространствах и их обобщениях" (ГПФНИ "Математические модели" на 2006–2010 гг., номер гос. регистрации 20062220).

2. "Анализ на метрических пространствах с мерой" на 2005 г., номер гос. регистрации 2005879.

3. "Пространства гладких функций на метрических пространствах с мерой" на 2006 г., номер гос. регистрации 2006939.

Цель и задачи исследования

Объектом исследования являются обобщенные классы Соболева $W^p_\alpha(X)$ на любом метрическом пространстве с мерой, которые дают единственный в настоящее время способ измерения гладкости в терминах пространств L^p в рассматриваемом общем контексте. Поэтому представляет интерес следующая общая проблема: в какой степени свойства функций из классов Соболева на евклидовых пространствах сохраняются для классов $W^p_\alpha(X)$.

Целью диссертационной работы являются количественные оценки массивности множества Лебега и исключительных множеств Лузина для функций из классов Соболева $W^p_\alpha(X)$ на произвольном метрическом пространстве X с мерой, удовлетворяющей условию удвоения.

Основные задачи диссертации состоят в следующем:

1. Построить шкалы емкостей (которые используются для оценки размеров исключительных множеств), установить их зависимости от параметров, а также связь с исходной мерой и мерами Хаусдорфа.

2. Изучить массивность множества точек Лебега для функций из классов Соболева в терминах мер Хаусдорфа и соответствующих емкостей.

3. Решить задачу об аппроксимации Лузина для функций из классов Соболева.

Положения, выносимые на защиту

1. Построены шкалы $\mathrm{Cap}_{\alpha,p}$-емкостей, которые используются для оценки малости исключительных множеств. Установлена их связь с исходной мерой и мерами Хаусдорфа.

2. Установлено, что функция из $W_\alpha^p(X)$ имеет точки Лебега почти всюду по соответствующей емкости и эквивалентна некоторой функции с емкостным свойством Лузина, которая может быть получена как предел средних Стеклова исходной функции. Оценена размерность Хаусдорфа дополнения множества точек Лебега функций из классов $W_\alpha^p(X)$.

3. Изучены следующие аспекты задачи об аппроксимации Лузина для обобщенных соболевских пространств — даны оценки исключительных множеств в терминах емкостей и мер Хаусдорфа, оценена гладкость исправляющей функции в исходном классе и в пространстве Гельдера, а также дана оценка уклонения от исходной функции по норме.

Личный вклад соискателя

Диссертация представляет собой самостоятельное исследование соискателя. Основные результаты диссертации получены автором самостоятельно. В совместных работах научному руководителю принадлежат постановки задач и выбор методов их исследования.

Апробация результатов диссертации

Результаты, вошедшие в диссертационную работу, докладывались и обсуждались на следующих научных семинарах и конференциях:

1. Семинар по математическому анализу Белгосуниверситета (руководитель — доктор физико-математических наук, профессор В.Г.Кротов).

2. Воронежская зимняя математическая школа "Современные проблемы теории функций и смежные проблемы" (27 января — 2 февраля 2005 года, Воронеж).

3. 13-я Саратовская зимняя школа "Современные проблемы теории функций и их приложения" (27 января — 3 февраля 2006 года, Саратов).

4. Международная конференция "Аналитические методы анализа и дифференциальных уравнений" (13 — 19 сентября 2006 года, Минск).

5. Международная математическая конференция "Актуальные проблемы математики и компьютерного моделирования" (18 — 22 июня 2007 года, Гродно).

6. 8-я международная Казанская летняя научная школа-конференция "Теория функций, ее приложения и смежные вопросы" (27 июня — 4 июля 2007 года, Казань).

7. 14-я Саратовская зимняя школа "Современные проблемы теории функций и их приложения" (28 января — 4 февраля 2008 года, Саратов).

8. International Workshop "Function Spaces and Applications" (6 — 12 July 2008, Freyburg/Unstrut, Germany).

9. 10-я Белорусская математическая конференция (3 — 7 ноября 2008 года, Минск).

10. 9-я международная Казанская летняя научная школа-конференция "Теория функций, ее приложения и смежные вопросы" (1 — 7 июля 2009 года, Казань).

Опубликованность результатов диссертации

Основные результаты диссертационной работы опубликованы в 14 научных работах, из которых 5 — статьи в научных изданиях в соответствии с пунктом 18 Положения о присуждении ученых степеней и присвоении ученых званий в Республике Беларусь (общим объемом 3.5 авторского листа), а также 4 статьи в сборниках трудов и материалах научных конференций и 5 тезисов докладов конференций.

Структура и объем диссертации

Диссертационная работа состоит из перечня условных обозначений на двух страницах, введения, общей характеристики, четырех глав, заключения и библиографического списка, содержащего 95 наименований, из которых 14 — собственные публикации соискателя. Полный объем диссертации составляет 96 страниц, из них 9 страниц занимает описание библиографических источников.

Первая глава содержит аналитический обзор литературы по теме исследования. Она состоит из следующих разделов: пространства Соболева, емкости, теорема Лебега, теорема Лузина о C -свойстве.

Во второй главе вводятся шкалы обобщенных соболевских пространств $W^p_\alpha(X)$ на произвольном метрическом пространстве X с мерой, удовлетворяющей условию удвоения и строятся емкости $\mathrm{Cap}_{\alpha,p}$, соответствующих этим шкалам. Доказаны необходимые свойства емкостей, установлена связь емкостей с исходной мерой и мерами Хаусдорфа, а также изучено изменение емкостей при изменении индексов α и p. Результаты этой главы используются далее в главах 3 и 4 при оценках размеров различных исключительных множеств.

Третья глава посвящена изучению массивности множества точек Лебега для функций из классов $W^p_\alpha(X)$. Показано, что функция из класса $W^p_\alpha(X)$ имеет q-точки Лебега $\mathrm{Cap}_{\alpha,p}$-почти всюду и обладает $\mathrm{Cap}_{\alpha,p}$-свойством Лузина. Дана оценка размерности Хаусдорфа дополнения ко множеству q-точек Лебега. При этом полученный показатель q является точным и аналогичен критическому показателю Харди–Литтлвуда–Соболева.

В четвертой главе рассмотрен абстрактный вариант задачи аппроксимации Лузина — какими дополнительными свойствами обладает функция из теоремы Лузина (исправляющая функция), если исходная функция принадлежит классу $W^p_\alpha(X)$. Доказана принадлежность исправляющей функции исходному классу и (локально) классу Гельдера. Оценена вместимость Хаусдорфа и емкость исключительного множества. Рассмотрен вопрос о приближении исходной функции по норме первоначального класса.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ

Глава 1 содержит обзор основных известных результатов о пространствах Соболева и о развитии тематики, связанной с теоремой Лебега и теоремой Лузина о C-свойстве как на евклидовых пространствах, так и на метрических пространствах с мерой.

Глава 2 посвящена определению основных объектов диссертации — пространств $W^p_\alpha(X)$, Кроме того, здесь изучены соответствующие этим пространствам емкости.

В разделе 2.1 приведены необходимые определения из теории метрических и функциональных пространств (подразделы 2.1.1–2.1.3), в подразделах 2.1.4–2.1.7 содержится необходимая информация о максимальной функции Харди–Литтлвуда и мерах Хаусдорфа, а также приводятся вспомогательные утверждения, связанные с леммами о покрытиях и разбиением единицы, являющиеся основными техническими средствами для тех или иных конструкций в диссертации.

Пусть (X, d, μ) — метрическое пространство с метрикой d и регулярной борелевской мерой μ,

$$B(x,t) = \{y \in X : d(x,y) < t\}$$

— шар с центром в точке $x \in X$ радиуса $t > 0$.

Всюду в диссертации предполагается выполненным следующее условие[1]

$$\mu\big(B\,(x,R)\big) \le a_\mu \left[\frac{R}{r}\right]^\gamma \mu\big(B\,(x,r)\big), \quad x \in X, \quad 0 < r \le R. \tag{1}$$

В многочисленных работах по анализу на метрических пространствах с мерой это условие широко используется, а параметр γ играет роль размерности метрического пространства X.

Для $\alpha > 0$ определим стандартные классы Гельдера

$$H_\alpha(X) = \left\{\phi \in L^\infty(X) : \|\phi\|_{H_\alpha(X)} = \sup_{x \ne y} |\phi(x) - \phi(y)|\,[d(x,y)]^{-\alpha} < +\infty\right\}.$$

[1]Здесь и всюду ниже через c мы обозначаем различные положительные постоянные, которые зависят только от a_μ и γ из условия удвоения (1), а также от p и α из определения (2) классов $W^p_\alpha(X)$.

Отметим, что они могут быть непусты для некоторых $\alpha > 1$ (например, на снежинке Коха).

Вместимость Хаусдорфа $\mathbb{H}^s_\infty$ и хаусдорфова размерность $\dim_{\mathbb{H}}$ множества $E \subset X$ понимаются обычным образом

$$\mathbb{H}^s_\infty(E) = \inf\left\{\sum_{i=1}^{\infty} r_i^s : E \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} B(x_i, r_i)\right\},$$

$$\dim_{\mathbb{H}}(E) = \inf\big\{s : \mathbb{H}^s_\infty(E) = 0\big\}.$$

В разделе 2.2 вводятся пространства Соболева $W^p_\alpha(X)$. Пусть $\alpha > 0$ и $1 < p < \infty$. Для функции $u \in L^p(X)$ обозначим через $D_\alpha[u]$ класс всех неотрицательных μ-измеримых функций g, для каждой из которых существует такое множество $E \subset X$, $\mu(E) = 0$, что

$$|u(x) - u(y)| \leq \big[d(x,y)\big]^\alpha [g(x) + g(y)], \quad x, y \in X \setminus E.$$

Элементы $D_\alpha[u]$ называются обобщенными α-градиентами функции u, с их помощью введем шкалу классов Соболева $W^p_\alpha(X)$

$$W^p_\alpha(X) = \Big\{u \in L^p(X) : D_\alpha[u] \cap L^p(X) \neq \varnothing\Big\}, \tag{2}$$

$$\|u\|_{W^p_\alpha(X)} = \left(\|u\|^p_{L^p(X)} + \left[\inf\big\{\|g\|_{L^p(X)} : g \in D_\alpha[u] \cap L^p(X)\big\}\right]^p\right)^{1/p}.$$

При $\alpha = 1$ эти классы были введены в работе П.Хайлаша[2]. Там же было показано, что пространство $W^p_1(\mathbb{R}^n)$ совпадает с классическим пространством Соболева. Отметим, что А.Кальдерон[3] ранее получил описание $W^p_1(\mathbb{R}^n)$, не использующее других специфических конструкций на $\mathbb{R}^n$, кроме метрики и меры.

При $\alpha > 0$ классы $W^p_\alpha(X)$ впервые появились в работах Д.Янга[4] (D.Yang) и Я.Ху[5] (J.Hu).

Раздел 2.3 содержит вспомогательные утверждения, связанные с неравенствами Пуанкаре и неравенствами для шарп-максимальных функций (подразделы 2.3.1 и 2.3.2).

[2]Hajłasz, P. Sobolev spaces on an arbitrary metric spaces / P. Hajłasz // Potential Analysis. — 1996. — Vol. 5, №4. — P. 403–415.

[3]Calderón, A.P. Estimates for singular integral operators in terms of maximal functions / A.P. Calderón // Studia Math. — 1972. — Vol. 44. — P. 561–582.

[4]Yang, D. New characterization of Hajłasz-Sobolev spaces on metric spaces / D. Yang // Science in China (series A). — 2003. — Vol. 46, №5. — P. 675–689.

[5]Hu, J. A note on Hajłasz—Sobolev spaces on fractals / J. Hu // Journal of mathematical analysis and applications. — 2003. — Vol. 280, №1. — P. 91–101.

В подразделе 2.4.1 вводятся $\mathrm{Cap}_{\alpha,p}$-емкости, порождаемые классами $W^p_\alpha(X)$. Для $p>1$ и $\alpha>0$ обозначим через

$$\mathrm{Cap}_{\alpha,p}(E)=\inf\left\{\|u\|^p_{W^p_\alpha(X)} : u\in W^p_\alpha(X),\, u\geq 1 \text{ в окрестности } E\right\}.$$

На пространствах однородного типа $\mathrm{Cap}_{1,p}$-емкости впервые появились в работе Ю.Киннунена–О.Мартио[6], а для произвольного $\alpha>0$ — в нашей работе [1].

Подраздел 2.4.2 содержит свойства непрерывности для емкостей, сравнение различных емкостей приводится в подразделе 2.4.3. В подразделе 2.4.4 приведены оценки, которые показывают связь $\mathrm{Cap}_{\alpha,p}$-емкости и меры[7].

Теорема 1 ([3]) *Пусть* $0<\alpha\leq 1$, $x_0\in X$, *тогда*
1) Для $0<r\leq 1$

$$\mathrm{Cap}_{\alpha,p}\big(B(x_0,r)\big)\leq cr^{-\alpha p}\mu\big(B(x_0,r)\big).$$

2) Для $0<r\leq 1/2$ *при* $p=\gamma/\alpha$

$$\mathrm{Cap}_{\alpha,p}\big(B(x_0,r)\big)\leq c\left[\ln\frac{1}{r}\right]^{1-p} r^{-\alpha p}\mu\big(B(x_0,r)\big).$$

На пространствах однородного типа при $\alpha=1$ это было сделано в работе Ю.Киннунена–О.Мартио (см. сноску 6). Случай $X=\mathbb{R}^n$ см., например, в работах С.Тейлора (S.J.Taylor) и Л.Карлесона (L.Carleson).

Связь емкостей с размерностью Хаусдорфа устанавливается в подразделе 2.4.5.

Теорема 2 ([2, 3]) *Пусть множество* $E\subset X$ *таково, что*

$$\mathrm{Cap}_{\alpha,p}(E)=0.$$

Тогда $\mathbb{H}^t_\infty(E)=0$ *для всех* $t>\gamma-\alpha p$, *в частности,*

$$\dim_{\mathbb{H}}(E)\leq\gamma-\alpha p.$$

Для случая $\alpha=1$ это доказано в работе Ю.Киннунена–О.Мартио (см. сноску 6), но при более жестком условии (регулярность по Альфорсу)

$$c^{-1}r^\gamma\leq\mu\big(B(x,r)\big)\leq cr^\gamma,\quad x\in X,\quad 0<r\leq\mathrm{diam}(X).$$

на меру, случай $X=\mathbb{R}^n$ см. в работах В.П.Хавина и В.Г.Мазьи.

[6] Kinnunen, J. The Sobolev capacity on metric spaces / J. Kinnunen, O. Martio // Annales Academiæ Scientiarum Fennicæ Mathematica. — 1996. — Vol. 21. — P. 367–382.

[7] Нумерация теорем не совпадает с нумерацией теорем в диссертации.

В **главе 3** изучается множество точек Лебега для функций из классов $W^p_\alpha(X)$. Мы используем стандартную терминологию: $x \in X$ называется точкой Лебега для функции $u \in L^1_{\mathrm{loc}}(X)$, если

$$\lim_{r\to+0}\frac{1}{\mu(B(x,r))}\int_{B(x,r)} u\,d\mu = u(x).$$

Будем говорить также, что $x \in X$ является q-точкой Лебега, если

$$\lim_{r\to+0}\frac{1}{\mu(B(x,r))}\int_{B(x,r)} |u-u(x)|^q\,d\mu = 0.$$

Это понятие тем сильнее, чем больше q.

В главе 3 изучена массивность множества q-точек Лебега для классов Соболева $W^p_\alpha(X)$ в терминах емкостей и мер Хаусдорфа.

Раздел 3.1 посвящен исследованию емкости дополнения множества точек Лебега для функции из $u \in W^p_\alpha(X)$. Всюду на протяжении раздела 3.1 $0 < \alpha \le 1$.

В подразделах 3.1.1–3.1.2 доказывается неравенство слабого типа для емкости — ключевое утверждение для доказательства основного результата параграфа (случай $\alpha = 1$ см. в работе Ю.Киннунена–В.Латвалы[8]).

Теорема 3 *Если $u \in W^p_\alpha(X)$, то при некотором $c > 0$*

$$\mathrm{Cap}_{\alpha,p}\Bigg(\{x \in X : Mu(x) > \lambda\}\Bigg) \le c\left[\frac{\|u\|_{W^p_\alpha(X)}}{\lambda}\right]^p, \quad \lambda > 0.$$

Здесь $Mu(x)$ — максимальная функция Харди–Литтлвуда

$$Mu(x) = \sup_{r>0}\frac{1}{\mu(B(x,r))}\int_{B(x,r)} |u|\,d\mu.$$

Будем говорить, что функция $u : X \to \mathbb{R}$ обладает $\mathrm{Cap}_{\alpha,p}$-свойством Лузина, если для любого $\varepsilon > 0$ существует множество $E_\varepsilon \subset X$ такое что $\mathrm{Cap}_{\alpha,p}(E_\varepsilon) < \varepsilon$ и сужение функции u на $X \setminus E_\varepsilon$ непрерывно.

Теорема 4 ([1]) *Пусть $0 < \alpha < \gamma/p$ и задана функция $u \in W^p_\alpha(X)$. Тогда*

1) существует такое множество $E \subset X$, что $\mathrm{Cap}_{\alpha,p}(E) = 0$ и для любого $x \in X \setminus E$ существует предел

$$\lim_{r\to+0}\frac{1}{\mu(B(x,r))}\int_{B(x,r)} u\,d\mu = u^*(x),$$

[8]Kinnunen, J. Lebesgue points for Sobolev functions on metric spaces / J. Kinnunen, V. Latvala // Revista Matemática Iberoamericana. — 2002. — Vol. 18, №3. — P. 685–700.

2) более того, для каждой точки $x \in X \setminus E$

$$\lim_{r\to+0} \frac{1}{\mu(B(x,r))} \int_{B(x,r)} |u - u^*(x)|^q \, d\mu = 0,$$

где

$$\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{\alpha}{\gamma}, \tag{3}$$

3) функция u^* *обладает* $\mathrm{Cap}_{\alpha,p}$*-свойством Лузина и*

$$\mathrm{Cap}_{\alpha,p}(\{u^* \neq u\}) = 0.$$

Это — основной результат раздела 3.1. В частном случае $\alpha = 1$ это утверждение было доказано в работе Ю.Киннунена–В.Латвалы (см. сноску 8), но в более слабой форме — лишь при $1/q > 1/p - 1/\gamma$. Случай евклидовых пространств был изучен гораздо раньше в работах Х.Федерера и В.Зимера.

Показатель (3) (его обычно называют критическим показателем Соболева или Харди–Литтлвуда–Соболева) нельзя улучшить уже в случае $\mathbb{R}^n$.

В разделе 3.2 изучена задача, подобная рассмотреной в предыдущем разделе, но массивность исключительных множеств Лебега оценивается с помощью других характеристик — мер и размерностей Хаусдорфа.

Основной результат раздела 3.2 — оценки размерности Хаусдорфа множества точек Лебега для функции из $W^p_\alpha(X)$ — имеет существенную особенность: он справедлив (в отличие от теоремы 4) при любом $\alpha > 0$.

Теорема 5 ([2, 5]) *Пусть функция* $u \in W^p_\alpha(X)$, $0 < \alpha < \gamma/p$, *а показатель* q *определен равенством (3).*

Тогда существует такое множество $E \subset X$, *что его размерность Хаусдорфа* $\dim_{\mathbb{H}}(E) \le \gamma - \alpha p$ *и для любого* $x \in X \setminus E$ *существует предел*

$$\lim_{r\to+0} \frac{1}{\mu(B(x,r))} \int_{B(x,r)} u \, d\mu = u^*(x),$$

более того,

$$\lim_{r\to+0} \frac{1}{\mu(B(x,r))} \int_{B(x,r)} |u - u^*(x)|^q \, d\mu = 0. \tag{4}$$

Доказательство этой теоремы основано на других идеях и использует дробные максимальные функции, необходимые свойства которых описаны в подразделе 3.2.1. Как и в теореме 4, показатель q здесь является точным.

При $\alpha = 1$ это утверждение было частично получено в работе П.Хайлаша–Ю.Киннунена[9] — равенство (4) там не рассматривалось.

[9]Hajłasz, P. Hölder qasicontinuity of Sobolev functions on metric spaces / P. Hajłasz, J. Kinnunen // Revista Matemática Iberoamericana. — 1998. — Vol. 14, №3. — P. 601–622.

Для случая $X = \mathbb{R}^n$ соответствующие результаты доказаны в работах Х.Федерера и В.Зимера.

В разделе 3.3 выведены оценки хаусдорфовой размерности множеств, на которых средние Стеклова сходятся к значениям функции с определенной скоростью.

В **главе 4** развивается тематика, связанная с классической теоремой Лузина о C-свойстве — для любой измеримой на $\mathbb{R}^n$ функции u и любого $\varepsilon > 0$ существуют функция $\varphi \in C(\mathbb{R}^n)$ и открытое множество $E_\varepsilon \subset \mathbb{R}^n$, для которых

$$u(x) = \varphi(x) \quad \text{при} \quad x \in E_\varepsilon, \quad \mu\left(\mathbb{R}^n \setminus E_\varepsilon\right) < \varepsilon \tag{5}$$

(μ — мера Лебега на $\mathbb{R}^n$).

Задачи о том, какими дополнительными свойствами обладают исключительное множество E_ε и функция φ для функций из пространств Соболева на $\mathbb{R}^n$, имеют весьма длинную историю (см. работы Г.Федерера, Х.Уитни, А.Кальдерона, А.Зигмунда, Т.Бэгби, В.Зимера, Дж.Майкла, Ф.Лиу и др.). Мы рассматриваем эту задачу для классов $W^p_\alpha(X)$ на общих метрических пространствах X.

В разделе 4.1 приведена формулировка основной теоремы главы 4.

Теорема 6 ([4]) *Пусть* $0 < \beta < \alpha \le 1$, $1 < p < \gamma/\alpha$ *и задана функция* $u \in W^p_\alpha(X)$.

Тогда для любого $\varepsilon > 0$ *существуют функция* w *и открытое множество* $O \subset X$, *такие что*

1) $\mathrm{Cap}_{\alpha-\beta,p}(O) < \varepsilon$, $\mathbb{H}^{\gamma-(\alpha-\beta)p}_\infty(O) < \varepsilon$,

2) $u = w$ *на* $X \setminus O$,

3) $w \in W^p_\alpha(X)$ *и* $w \in H_\beta(B)$ *для любого шара* $B \subset X$,

4) $\|u - w\|_{W^p_\alpha(X)} < \varepsilon$.

Таким образом, для любой функции $u \in W^p_\alpha(X)$ функция w в теореме Лузина принадлежит исходному классу и локально принадлежит классу Гельдера H_β, а исключительное множество имеет небольшие размеры — его массивность может быть оценена в терминах вместимости Хаусдорфа и $\mathrm{Cap}_{\alpha-\beta,p}$-емкости, $0 < \beta < \alpha \le 1$.

При $\beta = \alpha = 1$ подобный результат отмечался ранее П.Хайлашем (см. сноску 2), где вместо 1) утверждалось, что $\mu(O) < \varepsilon$, а в 3) было $w \in H_1(X)$. Случай $\beta < \alpha = 1$ существенно сложнее, он был изучен в работе П.Хайлаша–Ю.Киннунена (см. сноску 9). По сравнению с нашей теоремой 6 при $\beta < \alpha = 1$ там отсутствовала оценка $\mathrm{Cap}_{1-\beta,p}(O) < \varepsilon$, однако там же было сделано замечание, что при дополнительном ограничении $\beta < 1 - 1/p$ можно добиться оценки $\mathrm{Cap}_{1,(1-\beta)p}(O) < \varepsilon$. Последнее объясняется тем, что в их распоряжении в то время не было $\mathrm{Cap}_{\alpha,p}$-емкостей при $\alpha \neq 1$ (они появились впервые в нашей работе [1]).

Раздел 4.1 содержит поэтапное доказательство основной теоремы четвертой главы (подразделы 4.2.1–4.2.5).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Основные научные результаты диссертации

Диссертация посвящена изучению функций из обобщенных соболевских классов $W^p_\alpha(X)$ на любом метрическом пространстве X с мерой и метрикой, которые связаны условием удвоения. В диссертации

1. Введены и изучены емкости, порождаемые рассматриваемыми пространствами, и установлена связь емкостей с исходной мерой и мерами Хаусдорфа [1, 2, 3].

2. Описана количественная картина массивности множества точек Лебега функций из соболевских классов в терминах емкостей и в терминах мер Хаусдорфа [1, 2, 5].

3. Решена задача аппроксимации Лузина для классов $W^p_\alpha(X)$ — доказано, что для любой функции из $W^p_\alpha(X)$ в этом же классе существует локально гельдеровская функция, совпадающая с исходной вне некоторого открытого множества, сколь угодно малых емкости и вместимости Хаусдорфа, и приближающая исходную функцию по норме первоначального класса $W^p_\alpha(X)$ [4].

Эти результаты являются в определенном смысле точными и не допускают улучшения.

Доказанные утверждения обобщают, уточняют и дополняют результаты, полученные ранее в этом направлении другими авторами.

Рекомендации по практическому использованию результатов

Представленные в диссертации результаты имеют теоретический характер. Они тесно связаны с некоторыми фундаментальными теоремами анализа и могут быть использованы при дальнейшем развитии теории функциональных пространств. Например, в области анализа на неоднородных структурах, бедных алгебраическим содержанием.

Результаты исследования получены с использованием новых методов и подходов неклассического анализа и могут быть использованы в учебном процессе для составления спецкурсов по современному анализу.

СПИСОК ПУБЛИКАЦИЙ СОИСКАТЕЛЯ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

Статьи в научных журналах

1. Прохорович, М.А. Емкости и точки Лебега для дробных классов Хайлаша–Соболева на метрических пространствах с мерой / М.А. Прохорович // Известия НАН Беларуси. Серия физико-математических наук. — 2006. — №1. — С. 19–23.

2. Прохорович, М.А. Размерность Хаусдорфа множества Лебега для классов W^p_α на метрических пространствах / М.А. Прохорович // Математические заметки. — 2007. — Т. 82, №1. — С. 99–107.
(переведена на английский язык: Mathematical Notes, 2007, Vol. 82, No. 1, pp. 88–95.)

3. Прохорович, М.А. Соболевские емкости на метрических пространствах с мерой / М.А. Прохорович // Вестник БГУ. Серия 1: Физика, Математика, Информатика. — 2007. — №3. — С. 106–111.

4. Кротов, В.Г. Аппроксимация Лузина функций из классов W^p_α на метрических пространствах с мерой / В.Г. Кротов, М.А. Прохорович // Известия вузов. Математика. — 2008. — №5. — С. 55–66.
(переведена на английский язык: Russian Mathematics (Iz. VUZ), 2008, Vol. 52, No. 5, pp. 47–57.)

5. Прохорович, М.А. Меры Хаусдорфа и точки Лебега для классов Соболева W^p_α, $\alpha > 0$, на пространствах однородного типа / М.А. Прохорович // Математические заметки. — 2009. — Т. 85, №4. — С. 616—621.
(переведена на английский язык: Mathematical Notes, 2009, Vol. 85, No. 4, pp. 584–589.)

Статьи в сборниках трудов и материалах научных конференций

6. Прохорович, М.А. Точки Лебега для функций из классов Соболева на метрических пространствах с мерой / М.А. Прохорович // Современные методы теории функций и смежные проблемы: материалы Воронежской зимней математической школы, Воронеж, 27 января – 2 февраля 2005 г. / Воронежский гос. ун-т.; редкол.: П.Л. Ульянов [и др.]. — Воронеж, 2005. — С. 187–188.

7. Прохорович, М.А. Обобщенные пространства Соболева на метрических пространствах с мерой: тонкие свойства функций / М.А. Прохорович // Актуальные проблемы математики и компьютерного моделирования: сборник научных трудов. / ГрГУ им. Я. Купалы; редкол.: Ю.М. Вувуникян [и др.]. — Гродно, 2007. — С. 122–126.

8. Прохорович, М.А. Размерность Хаусдорфа и точки Лебега для функций из классов Соболева W^p_α на метрических пространствах с мерой / М.А. Прохорович // Теория функций, ее приложения и смежные вопросы: материалы Восьмой международной Казанской летней научной школы-конференции, 27 июня – 4 июля 2007 г. / Казанское математическое общество; редкол.: Л.А. Аксентьев [и др.]. — Казань, 2007. — С. 201–202.

9. Прохорович, М.А. О скорости сходимости средних Стеклова для функций из классов $W^p_\alpha(X)$ / М.А. Прохорович // Теория функций, ее приложения и смежные вопросы: материалы Девятой международной Казанской летней научной школы-конференции, 1 – 7 июля 2009 г. / Казанское математическое общество; редкол.: Ф.Г. Авхадиев [и др.]. — Казань, 2009. — С. 228–230.

Тезисы докладов

10. Прохорович, М.А. Емкости и размерность Хаусдорфа множества точек Лебега для функций из классов Соболева на пространствах однородного типа / М.А. Прохорович // Современные проблемы теории функций и их приложения: тезисы докладов 13-й Саратовской зимней школы, 27 января – 3 февраля 2006 г. / ООО Из-во "Научная книга"; редкол.: П.Л. Ульянов [и др.]. — Саратов, 2006. — С. 146–147.

11. Кротов, В.Г. Аппроксимация Лузина в классах Соболева на метрических пространствах с мерой / В.Г. Кротов, М.А. Прохорович // Аналитические методы анализа и дифференциальных уравнений: тезисы докладов международной конференции, 13 – 19 сентября 2006 г. / Институт математики НАН Беларуси; редкол.: А.А. Килбас [и др.]. — Минск, 2006. — С. 71.

12. Прохорович М.А. Размерность Хаусдорфа множества Лебега для W^p_α на пространствах однородного типа. / М.А. Прохорович // Современные проблемы теории функций и их приложения: тезисы докладов 14-й Саратовской зимней школы, 28 января – 4 февраля 2008 г. / Издательство Саратовского университета; редкол.: Б.С. Кашин [и др.]. — Саратов, 2008. — С. 154–155.

13. Кротов, В.Г. О скорости сходимости средних Стеклова на метрических пространствах с мерой / В.Г. Кротов, М.А. Прохорович // X Белорусская математическая конференция: тезисы докладов международной научной конференции, 3 – 7 ноября 2008 г.: в 3 ч. / Институт математики НАН Беларуси. ред. С.Г. Красовский, А.А. Лепин. — Минск, 2008. — Ч. 1. — С. 62–63.

14. Prohorovich, M.A. Fine properties of functions from Hajłasz–Sobolev fractional classes / M.A. Prohorovich // International Workshop on Function Spaces and Applications, 6 – 12 july, 2008, Freyburg/Unstrut (Germany).

[Electronic resource]. — 2008. — Mode of access: http: //www.minet.uni-jena.de/$\sim$wfs/notes/proho_wfs.pdf. — Date of access: 14.09.2009.

РЕЗЮМЕ

Прохорович Михаил Александрович

ОБОБЩЕННЫЕ ПРОСТРАНСТВА СОБОЛЕВА НА МЕТРИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВАХ С МЕРОЙ: ТОНКИЕ СВОЙСТВА ФУНКЦИЙ

Ключевые слова: метрическое пространство с мерой, пространство однородного типа, пространство Соболева, размерность Хаусдорфа, точка Лебега, емкость, аппроксимация Лузина.

Целью диссертационной работы являются количественные оценки массивности множества Лебега и исключительных множеств Лузина для функций из классов обобщенных классов Соболева на произвольном метрическом пространстве X с мерой, удовлетворяющей условию удвоения.

В диссертации получены следующие новые результаты:

1) описана массивность множества точек Лебега в терминах емкостей и в терминах мер Хаусдорфа;

2) решена задача аппроксимации Лузина: доказано, что для любой функции из класса Соболева в нем существует локально гельдеровская функция, совпадающая с исходной вне некоторого открытого множества, сколь угодно малой емкости и вместимости Хаусдорфа, а также дана оценка нормы разности приближающей и исходной функций.

Эти результаты справедливы при определенных соотношениях, связывающих основные параметры, которые являются в определенном смысле оптимальными и не допускают существенного улучшения.

Доказанные утверждения обобщают, дополняют и уточняют результаты, полученные ранее в этом направлении другими авторами.

В диссертации используются современные методы метрической теории функций и функционального анализа, связанные с теоремами о покрытиях, разбиениями единицы, а также с различными максимальными операторами.

Результаты диссертации могут быть использованы в научных исследованиях по анализу на метрических пространствах с мерой и по гармоническому анализу, а также при чтении специальных курсов по этим разделам современной математики.

РЭЗЮМЭ

Прахаровіч Міхаіл Аляксандравіч

АБАГУЛЬНЕНЫЯ ПРАСТОРЫ СОБАЛЕВА НА МЕТРЫЧНЫХ ПРАСТОРАХ З МЕРАЙ: ТОНКІЯ ЎЛАСЦІВАСЦІ ФУНКЦЫЙ

Ключавыя словы: метрычная прастора з мерай, прастора аднароднага тыпу, прастора Собалева, размернасць Хаўсдорфа, кропка Лебега, ёмістасць, апраксімацыя Лузіна.

Мэтай дысертацыйнай працы з'яўляюцца колькасныя ацэнкі масіўнасці мноства Лебега і выключных мностваў Лузіна для функцый з класаў абагульненых класаў Собалева на адвольнай метрычнай прасторы X з мерай, якая адпавядае ўмове падваення.

У дысертацыі атрыманы наступныя новыя вынікі:

1) апісана масіўнасць мноства кропак Лебега ў тэрмінах ёмістасцей і ў тэрмінах мер Хаўсдорфа;

2) вырашана задача апраксімацыі Лузіна: даказана, што для любой функцыі з класа Собалева ў ім існуе лакальна гельдэраўская функцыя, якая супадае з зыходнай па-за некаторым адкрытым мноствам, колькі заўгодна малой ёмістасці і змяшчальнасці Хаўсдорфа, а таксама дадзена ацэнка нормы рознасці набліжаючай і зыходнай функцый.

Гэтыя вынікі справядлівыя пры вызначаных суадносінах, што злучаюць асноўныя параметры, якія з'яўляюцца ў пэўным сэнсе аптымальнымі і не дапускаюць істотнага паляпшэння.

Даказаныя сцвярджэнні абагульняюць, дапаўняюць і ўдакладняюць вынікі, атрыманыя раней у гэтым кірунку іншымі аўтарамі.

У дысертацыі выкарыстоўваюцца сучасныя метады метрычнай тэорыі функцый і функцыянальнага аналізу, звязаныя з тэарэмамі аб пакрыццях, разбіўкамі адзінкі, а таксама з рознымі максімальнымі аператарамі.

Вынікі дысертацыі могуць быць выкарыстаны ў навуковых даследаваннях па аналізе на метрычных прасторах з мерай і па гарманічным аналізе, а таксама пры чытанні спецыяльных курсаў па гэтых раздзелах сучаснай матэматыкі.

SUMMARY

Prokhorovich Mikhail

GENERALIZED SOBOLEV SPACES
ON METRIC SPACES WITH MEASURE:
FINE PROPERTIES OF FUNCTIONS

Keywords: a metric space with measure, space of homogeneous type, Sobolev spaces, Hausdorff dimension, Lebesgue point, capacity, the Luzin approximation.

The purpose of this thesis is the development of the quantities estimates of the size of the set of Lebesque points and exceptional Lusin sets for the generalized Sobolev functions on arbitrary metric space X with predefined doubling measure.

The following results were obtained:

1) the size of the set of Lebesgue points was described in term of capacities and Hausdorff measures;

2) the Luzin approximation problem was solved: It was proved, that for any function from Sobolev class there exists a function in the same class that is also in Hölder class (local), such that the given functions are the same outside an open set with arbitrary small capacity and Hausdorff content. We also give the estimate of difference of original and approximate function under the norm of the original class.

These results hold under the certain conditions that connect the main parameters. It was proved that obtained results and conditions on the parameters are optimal in a certain sense and can not be essentially improved.

The statements proved in this thesis generalize and extend the results, obtained earlier in this area of research by other authors.

The results of the thesis can be used in harmonic analysis research, and for lecture materials for specialized courses on one of the sections of modern mathematics — analysis on metric-measure spaces.