Министерство образования Республики Беларусь

Учебно-методическое объединение высших учебных заведений Республики Беларусь по естественнонаучному образованию

УТВЕРЖДАЮ
Первый заместитель Министра образования Республики Беларусь
______________ А.И. Жук
14.04.2010
(дата утверждения)
Регистрационный № ТД-G.263/тип.

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ И ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Типовая учебная программа
для высших учебных заведений по специальностям:

1-31 03 03	**Прикладная математика (по направлениям);**
1-31 03 04	**Информатика;**
1-31 03 05	**Актуарная математика;**
	по направлениям специальностей:
1-31 03 06-01	**Экономическая кибернетика (математические методы и компьютерное моделирование в экономике);**
1-98 01 01-01	**Компьютерная безопасность (математические методы и программные системы)**

СОГЛАСОВАНО
Председатель Учебно-методического объединения вузов Республики Беларусь по естественнонаучному образованию
______________ В.В. Самохвал
12.05.2009
(дата)

СОГЛАСОВАНО
Начальник Управления высшего и среднего специального образования
______________ Ю.И. Миксюк
14.04.2010
(дата)

Проректор по учебной и воспитательной работе Государственного учреждения образования «Республиканский институт высшей школы»
______________ В.И. Шупляк
25.03.2010
(дата)

Эксперт-нормоконтролер
______________ А.Л. Гращина
25.03.2010
(дата)

Минск 2009

Функцион. анализ и интегральные уравнения

СОСТАВИТЕЛИ:

В.И. Корзюк, заведующий кафедрой математической физики Белорусского государственного университета, член-корреспондент Нациаональной академии наук Беларуси, доктор физико-математических наук, профессор;

Е.С. Чеб, доцент кафедры математической физики Белорусского государственного университета, кандидат физико-математических наук, доцент

РЕЦЕНЗЕНТЫ:

Кафедра теории функций, функционального анализа и прикладной математики Учреждения образования «Гродненский государственный университет имени Янки Купалы»;

О.И. Костюкова, главный научный сотрудник Государственного научного учреждения «Институт математики Национальной академии наук Беларуси», доктор физико-математических наук, профессор

РЕКОМЕНДОВАНА К УТВЕРЖДЕНИЮ В КАЧЕСТВЕ ТИПОВОЙ:

Кафедрой математической физики Белорусского государственного университета
(протокол № 6 от 20 ноября 2008 г.)

Научно-методическим советом Белорусского государственного университета
(протокол № 1 от 1 декабря 2008 г.);

Научно-методическим советом по прикладной математике и информатике Учебно-методического объединения вузов Республики Беларусь по естественнонаучному образованию
(протокол № 3 от 10 марта 2009 г.)

Научно-методическим советом по специальности 1-98 01 01 «Компьютерная безопасность» Учебно-методического объединения вузов Республики Беларусь по естественнонаучному образованию
(протокол № 1 от 11 марта 2009 г.)

Ответственный за выпуск: Е.С. Чеб

Пояснительная записка

Дисциплина «Функциональный анализ и интегральные уравнения» является продолжением курса «Математический анализ» и «Геометрия и алгебра». Обобщая основные идеи данных курсов на случай бесконечномерных пространств, она знакомит студентов с основными понятиями банаховых и гильбертовых пространств и методами исследования операторных уравнений в этих пространствах.

«Функциональный анализ и интегральные уравнения» связан с курсами «Математический анализ», «Дифференциальные уравнения». Методы, излагаемые в курсе, непосредственно используются при изучении дисциплин «Уравнения математической физики», «Методы численного анализа», «Методы оптимизации», «Теория вероятностей и математическая статистика», а также при изучении дисциплин специализации.

Дисциплина «Функциональный анализ и интегральные уравнения» отражает важное направление развития современной математики, поскольку в ней рассматриваются не отдельные объекты типа функций или уравнений, а обширные классы таких объектов с естественной структурой векторного пространства. Это позволяет сформировать у будущих специалистов абстрактное мышление и получить необходимую базу знаний для их дальнейшего применения в различных областях знаний.

При изложении курса важно показать, как используются основные положения функционального анализа при решении прикладных задач, возникающих в различных областях естествознания, в частности, описываемыми интегральными уравнениями.

В соответствии с типовыми учебными планами специальностей 1- 31 03 03 «Прикладная математика», 1- 31 03 04 «Информатика», 1- 31 03 05 «Актуарная математика» и направлений специальностей 1- 31 03 06 - 01 «Экономическая кибернетика (математические методы и компьютерное моделирование в экономике)», 1- 98 01 01 – 01 «Компьютерная безопасность (математические методы и программные системы)» учебная программа предусматривает для изучения дисциплины 195 учебных часов, в том числе 102 аудиторных часа: лекции – 68 часов, практические занятия – 34 часа.

В результате изучения дисциплины студент должен

знать:

- теорию меры, интеграл Лебега и его свойства;
- основные понятия и методы теории банаховых и гильбертовых пространств;
- основные понятия теории линейных ограниченных операторов;
- теорию разрешимости операторных уравнений 1-го и 2-го рода;

уметь:

- использовать интеграл Лебега, интеграл Лебега-Стилтьеса;
- исследовать множества в банаховых и гильбертовых пространствах;
- исследовать операторные уравнения, в частности, интегральные уравнения Фредгольма и Вольтерра.

Примерный тематический план

№	Название раздела, темы	Количество аудиторных часов		
		Всего	В том числе	
			Лекции	Практические занятия
1.	*Введение*	2	2	
2.	*Раздел 1. Мера и измеримые по Лебегу множества*	12	8	4
3.	*Раздел 2. Измеримые функции*	4	2	2
4.	*Раздел 3. Интеграл Лебега*	14	8	6
5.	*Раздел 4. Нормированные векторные пространства*	12	8	4
6.	*Раздел 5. Банаховы пространства*	6	4	2
7.	*Раздел 6. Гильбертовы пространства*	12	8	4
8.	*Раздел 7. Компактные множества в банаховых пространствах*	8	6	2
9.	*Раздел 8. Линейные ограниченные операторы*	12	8	4
10.	*Раздел 9 . Сопряженное пространство*	6	4	2
11.	*Раздел 10. Сопряженные и самосопряженные операторы*	6	4	2
12.	*Раздел 11. Компактные операторы*	6	4	2
13.	*Раздел 12. Спектральная теория*	2	2	
	Всего	102	68	34

Содержание

Введение

Предмет и основные методы дисциплины «Функциональный анализ и интегральные уравнения». Исторические сведения о возникновении и развитии этого раздела математики, его место среди других математических наук.

Раздел 1. Мера и измеримые по Лебегу множества

Кольцо, полукольцо, алгебра, σ - алгебра на множестве. Построение минимального кольца, порожденного полукольцом.

Понятие меры множества и ее простейшие свойства. σ - аддитивная мера и ее непрерывность. Продолжение меры с полукольца на минимальное кольцо.

Внешняя мера и ее сужение на класс измеримых множеств. Измеримость по Лебегу и ее критерий. σ - алгебра измеримых множеств. Измеримые множества на числовой прямой. Канторово совершенное множество и его характеристика.

Мера Лебега-Стилтьеса и ее σ- аддитивность. Абсолютно непрерывные меры. Абсолютная непрерывность меры Лебега-Стилтьеса относительно меры Лебега на борелевской σ- алгебре $B([a,b))$. Абсолютно непрерывные функции.

Раздел 2. Измеримые функции

Измеримые числовые функции, их свойства, сходимость в пространстве измеримых функций почти всюду, по мере и в каждой точке. Теорема Егорова.

Раздел 3. Интеграл Лебега

Простые функции. Интеграл Лебега от простых функций. Интеграл Лебега на множестве конечной меры, его абсолютная непрерывность и σ -аддитивность. Предельный переход под знаком интеграла Лебега. Теоремы Лебега, Беппо - Леви, Фату. Сравнение интеграла Лебега с интегралом Римана.

Функции с ограниченным изменением. Понятие об интеграле Лебега-Стилтьеса и Римана-Стилтьеса, их применение в теории вероятностей.

Раздел 4. Нормированные векторные пространства

Нормированные векторные пространства, открытые и замкнутые множества в них. Предельные точки и точки прикосновения множества. Замыкание множества.

Сходящиеся последовательности и их свойства. Сходимость в пространствах $C[a,b]$, $L_p[a,b]$, ℓp, $p \geq 1$, l_∞.

Непрерывные отображения нормированных пространств, теорема о непрерывном отображении. Непрерывность композиции отображений. Аппроксимация, построение элемента наилучшей аппроксимации в конечномерных пространствах и в строго нормированных пространствах.

Раздел 5. Банаховы пространства

Банаховы пространства. Принцип вложенных шаров. Нигде не плотные и всюду плотные множества в банаховых пространствах.

Пополнение нормированных векторных пространств.

Раздел 6. Гильбертовы пространства

Пространства со скалярным произведением (предгильбертовы пространства), свойства скалярного произведения. Гильбертовы пространства. Проекция в гильбертовых пространствах. Разложение гильбертова пространства в прямую сумму. Аппроксимация. Ряды Фурье и полные ортонормированные системы. Примеры полных ортонормированных систем.

Пространство суммируемых по Лебегу функций $L_p[a,b]$, пространство Соболева. Понятие обобщенной производной. Вложение пространств Соболева.

Раздел 7. Компактные множества в банаховых пространствах

Компактные и предкомпактные множества в банаховых пространствах. Вполне ограниченность и предкомпактность, ε-сеть. Предкомпактность в $C[a,b]$ (теорема Арцела-Асколи). Лемма о почти перпендикуляре. Критерий конечномерности нормированного векторного пространства.

Принцип сжимающих отображений в банаховых пространствах и его применении к решению СЛАУ, к решению интегральных уравнений Фредгольма и Вольтера второго рода. Отображения на компактах, принцип неподвижной точки. Теорема Брауэра и теорема Какутани, их использование в экономических моделях.

Раздел 8. Линейные ограниченные операторы

Линейные ограниченные операторы, примеры. Ограниченность интегрального оператора, неограниченность оператора дифференцирования. Пространство линейных ограниченных операторов, равномерная и сильная сходимость последовательности линейных ограниченных операторов. Принцип равномерной ограниченности и его приложения в вычислительной математике (интерполирование по Лагранжу).

Обратные операторы. Левый и правый обратные операторы. Непрерывная обратимость оператора и корректная разрешимость операторных уравнений вида $x - Ax = y$, $Ax = y$. Теоремы о существовании обратного оператора $(I-A)^{-1}$. Мера обусловленности оператора.

Замкнутые операторы. Теорема Банаха о замкнутом графике.

Раздел 9. Сопряженное пространство

Линейные ограниченные функционалы и сопряженное пространство. Теоремы Рисса об общем виде линейного ограниченного функционала в гильбертовом пространстве и пространстве непрерывных функций $C[a,b]$. Теорема Хана-Банаха о продолжении линейного функционала с сохранением нормы. Постановка задачи об оптимизации квадратурных формул.

Раздел 10. Сопряженные и самосопряженные операторы

Сопряженные и самосопряженные операторы в банаховых и гильбертовых пространствах. Примеры. Применение сопряженного оператора для исследования операторного уравнения вида $Ax = y$. Оператор ортогонального проектирования.

Раздел 11. Компактные операторы

Компактные операторы и их свойства, пространство компактных операторов. Теория Рисса-Шаудера разрешимости уравнений $x - Ax = y$ с компактным оператором. Альтернатива Фредгольма для разрешимости уравнений Фредгольма и Вольтера второго рода. Разрешимость интегральных уравнений I-го рода. Интегральные уравнения с вырожденным ядром.

Раздел 12. Спектральная теория

Собственные значения и собственные векторы линейного, компактного и компактного самосопряженного операторов и их свойства в банаховых и гильбертовых пространствах. Теорема Гильберта-Шмидта в разложении компактного самосопряженного оператора в гильбертовом пространстве в ряд по собственным векторам и ее приложение к решению интегральных уравнений. Спектр и резольвента линейного оператора и их свойства.

Литература

Основная

1. Антоневич А.Б., Радыно Я.В. Функциональный анализ и интегральные уравнения. – Мн.: БГУ, 2003. – 430 с.

2. Березанский Ю.М., Ус Г.Ф., Шефтель З.Г. Функциональный анализ. Курс лекций. – Киев: Выща шк., 1990. – 600 с.

3. Вулих Б.З. Введение в функциональный анализ. – М.: Наука, 1967. – 416 с.

4. Городецкий В.В., Нагнибеда Н.И., Настиев П.П. Методы решения задач по функциональному анализу. – Киев: Выща шк., 1990. – 479 с.

5. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. – М.: Наука, 1989. – 623 с.

6. Лебедев В.И. Функциональный анализ и вычислительная математика. Учебное пособие. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2000. – 296 с.

7. Люстерник Л.А., Соболев В.И. Краткий курс функционального анализа. – М.: Высш. шк., 1982. – 272 с.

8. Треногин В.А. Функциональный анализ. – М.: Наука, 1980. – 496 с.

Дополнительная

9. Варга Р.С. Функциональный анализ и теория аппроксимации в вычислительном анализе. – М.: Мир, 1974. – 126с.

10. Иосида К. Функциональный анализ. – М.: Мир, 1967. – 624с.

11. Канторович Л.В., Акилов Г.П. Функциональный анализ. – М.: Наука, 1977. – 742с.

12. Коллатц Л. Функциональный анализ и вычислительная математика. – Мир, 1969. – 447с.

13. Морен К. Методы гильбертового пространства. – М.: Мир, 1965. – 572с.

14. Петровский И.Г. Лекции по теории интегральных уравнений. – М.:УРСС, 2003. – 120с.

15. Рудин У. Функциональный анализ. – М.: Мир, 1975. – 448с.

16. Соболев С.Л. Некоторые применения функционального анализа в математической физике. Л. : Изд-во Ленингр. ун.-та, 1950. – 256с.

17. Халмош П. Теория меры. – М.: Изд-во иностр. лит., 1953. – 290с.

18. Шилов Г.Е., Гуревич Б.П. Интеграл, мера, производная. М.: Наука, 1967. – 220с.

19. Эдвардс Р. Функциональный анализ. Теория и приложения. – М.: Мир, 1969. – 1071с.