МЕТОД КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ В ЗАДАЧАХ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

Севрук А. Б.

Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь,
e-mail: asevruk2005@yandex.ru

Рассматривается тело вращения (относительно оси z) с уравнениями поверхности S:

$$R_S = \sqrt{r^2 + z^2} = R(2 + \cos\psi),$$

где R – заданный параметр поверхности S,

$\psi = (\overline{z_0}, \overline{r_0})$ $(r, z) \in S : \{ r = R(2 + \cos\psi)\sin\phi; \;\; z = R(2 + \cos\psi)\cos\phi \}$, ϕ – полярный угол.

Необходимо решить граничную задачу в перемещениях:

$$\frac{\partial^2 U_1}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 U_1}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 U_1}{\partial z^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial U_1}{\partial r} - \frac{2}{r^2}\frac{\partial^2 U_2}{\partial \varphi} - \frac{1}{r^2}U_1 - \frac{1}{1-2\nu}\frac{\partial \theta}{\partial r} + \frac{\rho}{G} f_1 = 0;$$

$$\frac{\partial^2 U_2}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 U_2}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 U_2}{\partial z^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial U_2}{\partial r} - \frac{2}{r^2}\frac{\partial^2 U_2}{\partial \varphi} + \frac{2}{r^2}\frac{\partial U_1}{\partial \varphi} + \frac{1}{(1-2\nu)r}\frac{\partial \theta}{\partial \varphi} + \frac{\rho}{G} f_2 = 0;$$

$$\frac{\partial^2 U_3}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 U_3}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 U_3}{\partial z^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial U_3}{\partial r} + \frac{1}{1-2\nu}\frac{\partial \theta}{\partial z} + \frac{\rho}{G} f_3 = 0;$$

$$\theta = \frac{\partial U_1}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial U_2}{\partial \phi} + \frac{\partial U_3}{\partial z} + \frac{1}{r}U_1, \;\; x^{(1)} = r; \;\; x^{(2)} = \phi; \;\; x^{(3)} = z;$$

$$U_r \Big/ _{(r,z)\in S} = \frac{9(1-15\nu)}{8\mu(1+\nu)} R^2 (2\cos\phi)^2 \sin 2\psi;$$

$$U_r \Big/ _{(r,z)\in S} = 0;$$

$$U_r \Big/ _{(r,z)\in S} = -\frac{9(7-22\nu)}{8\mu(1+\nu)} R^2 (2+\cos\psi)^2 \cos\psi;$$

где ν – коэффициент Пуассона, μ – параметр Ламе. $\mu = E \big/ (2(1+\nu))$, E – модуль Юнга.

В данной работе применяется вычислительный алгоритм МКЭ в формулировке, основанной на процедуре минимизации функционала. В результате выполнения указанной процедуры происходит замещение уравнения или системы уравнений в частных производных системой линейных алгебраических уравнений, имеющих в качестве коэффициентов аппроксимирующие функции, которые фактически являются значениями искомой функции в вершинах разбиения.