МОДЕЛИРОВАНИЕ ЭФФЕКТА РАЗУПРОЧНЕНИЯ В ЗАДАЧАХ НЕГОЛОНОМНОЙ ТЕОРИИ ПЛАСТИЧНОСТИ

Нифагин В. А., Овсянников А. В.

Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь,
e-mail: vladnifagin@bsu.by, andovs@tut.by

Для упрочняющихся упругопластических сред отмечен эффект, когда материал упрочняется в отношении прямого предела упругости и разупрочняется в отношении обратного [1], так называемый эффект Баушингера. В случае многозвенных диаграмм нагружения, имеющиеся экспериментальные данные наиболее точно описываются в рамках усложненных математических теорий пластичности, таких как инкрементальная теория течения с трансляционным упрочнением [2].

При этом необходимо получить вид определяющих соотношений для режима разупрочнения в многоосном состоянии. Такого рода представления были получены на основе постулата Друккера [3], когда предполагалась, что приращение напряжений $\delta\sigma_{ij}$ на поверхности нагружения в состоянии разупрочнения всегда ориентировано внутрь поверхности. Таким образом, σ_{ij} принадлежит текущей поверхности нагружения, а вектор $\boldsymbol{\delta\sigma}$ образует с вектором-градиентом функции f острый угол. Итак, условием пассивного обратного нагружения будет выполнение равенства, задающего текущую предельную поверхность

$$f\left(\sigma_{ij}, e_{ij}^{p}, \chi_{n}^{p}\right) = 0, \tag{1}$$

где χ_{ij}^{p} – обозначены параметры, зависящие от истории изменения e_{ij}^{p}, постоянные при фиксированных e_{ij}^{p}, вместе с неравенством

$$f_{,\sigma_{ij}}\, \delta\sigma_{ij} < 0, \tag{2}$$

здесь, как обычно по повторяющимся индексам производится суммирование.

Для удобства в одном и том же девятимерном декартовом пространстве описываются представления для напряжений и деформаций, считая, что вдоль данного орта i_k откладываются одноиндексные компоненты тензоров σ_{ij} и e_{ij}.

Тогда соответствующее приращение деформаций может быть упругим и упругопластическим, выходящим за поверхность нагружения при активной догрузке

$$\sigma e_{ij} = \begin{cases} \delta e_{ij}^{e} \\ e_{ij}^{e} + e_{ij}^{p} \end{cases}.$$

В первом случае форма и расположение поверхности нагружения не меняются, а во втором – поверхность перемещается внутрь в текущей точке. Было показано, что для разупрочняющихся сред при линейном режиме разгрузки и независимости упругих модулей от необратимых составляющих деформаций выполняются утверждения о выпуклости гладких поверхностей нагружения и нормальности к ним вектора приращений $\boldsymbol{\delta e^p}$ пластических деформаций, при неустойчивости в малом

$$\boldsymbol{\delta\sigma\,\delta e^p} < 0$$

элемента среды при активном процессе деформирования [4].

Определяющие уравнения ассоциированной теории течения возьмем в виде

$$e_{ij} = e_{ij}^e + e_{ij}^p;\ \dot{e}_{ij}^p = f,_{\sigma_{ij}} \cdot \dot{\lambda};\ \dot{\lambda} = \frac{\alpha}{Q}\dot{f};\ \dot{\lambda} = \begin{cases} 0, \ \alpha = 0 \\ > 0, \ \alpha = 1 \end{cases};\ \dot{f} = f,_{\sigma_{ij}} \cdot \dot{\sigma}_{ij} < 0;\ Q < 0,$$

где $f\left(\sigma_{ij}\right) = 0$ – уравнение, задающее поверхность нагружения, Q – функция разупрочнения, зависящая от текущих значений и истории напряженно-деформированного состояния.

В тоже время последние соотношения не позволяют сформулировать законченную теорию из-за того, что, во-первых, не содержит возможности выбора величины λ, на основе которой можно было различать режимы разгрузки и догрузки при решении конкретных задач, а во-вторых, из-за нереализуемости цикла по напряжениям для некоторых начальных состояний. Следует отметить, что первая проблема связана с тем, что понятие поверхности нагружения для модели разупрочняющегося материала теряет свое значение, так как последняя не будет в этом случае разделять области упругих и пластических состояний элемента среды и произвольное приращение напряжений, откладываемое от текущей точки на поверхности внутрь ее может соответствовать как активному, так и пассивному догружению, в то время как направленное вне поверхности приращение, невозможно.

Эти проблемы могут быть сняты в рамках естественным образом вводимой концепции поверхности деформирования [5]. Применяя свойства нормальности и выпуклости получим определяющиеся соотношения теории течения для разупрочняющейся среды. Уравнение

$$f\left(e_{ij}, e_{ij}^p, \chi_k\right) = 0$$

описывает текущую поверхность деформирования. Здесь χ_κ – обозначают параметры, зависящие в общем случае от текущих значений или истории пластических деформаций e_{ij}^p, которые постоянны при фиксированных e_{ij}^p.

При активном деформировании

$$\delta e_{ij}^p = gf,_{e_{ij}}\ f,_{e_{\kappa m}}\,\delta e_{\kappa m},$$

где нормаль $f,_{e_{ij}}$ направлена вне поверхности деформирования.

Для упругой догрузки $\delta e_{ij}^e = \dfrac{1}{G}\delta s_{ij}$, поэтому, используя принцип суперпозиции

$$\delta e_{ij} = \delta e_{ij}^e + \delta e_{ij}^p = \frac{1}{2G}\delta s_{ij} + gf,_{e_{ij}} \cdot f, e_{\kappa m} \cdot \delta e_{\kappa m}.$$

Заметим, что в последних соотношениях для простоты осуществлен переход к компонентам девиаторов напряжений и деформаций, ограничиваясь для компактности несжимаемостью среды.

Последнее равенство в векторной форме имеет вид

$$\boldsymbol{\delta s} = 2G\,\boldsymbol{\delta e} - 2GQ\left(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\delta e}\right)\boldsymbol{n}\,,$$

здесь $Q = g\cdot f,_{e_{ij}}\cdot f,_{e_{ij}}$.

Используя в качестве критерия процесса активного деформирования, условие

$$\boldsymbol{n\delta e} > 0\,.$$

Так как для линейного процесса нагружения $\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\delta s}\le 0$, то $Q>1$. Как обычно функцию $Q\left(e_{ij}^{p}, \chi_{\kappa}\right)$ назовем функцией разупрочнения. В тоже время для пассивной части

$$\boldsymbol{\delta s} = 2G\boldsymbol{\delta e}\ \ \left(f<0 \text{ или } \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\delta e}\le 0\right)$$

находим ассоциированный закон течения для среды с эффектом разупрочнения

$$\boldsymbol{\delta s} = 2G\,\boldsymbol{\delta e} - 2G\kappa Q\left(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\delta e}\ \right)\boldsymbol{n}$$

где

$$x = \begin{cases} 1,\ \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\delta e} > 0,\ f = 0 \\ 0,\ \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\delta e} \le 0,\ f \le 0 \end{cases}$$

Заметим, что последние соотношения можно обратить

$$\boldsymbol{\delta e} = \frac{1}{2G}\boldsymbol{\delta s} - \frac{\kappa Q}{2G\left(1-h\right)}\left(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\delta s}\right)\boldsymbol{n}\,.$$

Вид этих уравнений формально совпадает с аналогичными для упрочнения, однако задание $\boldsymbol{\delta s}$ здесь недостаточно для отыскания $\boldsymbol{\delta e}$, так как значение κ остается неопределенным.

Функция разупрочнения отыскивается из уравнений

$$Q = -\frac{f,_{e_{\kappa m}}\cdot\delta e_{\kappa m}}{\left(1+\sqrt{\left(f,_{e_{ij}}\cdot f,_{e_{ij}}\right)}\right)\left(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\delta e}\right)}\,.$$

Или в обращенном виде

$$\delta s_{ij} = 2G\delta \boldsymbol{e}_{ij}^{p} - G(F,_{e_{ij}} - \frac{4}{3}J_2J_3F,_{J_3}\,)\delta F$$

В качестве примера использования приведенных соотношений решена задача о трещине нормального отрыва в условиях разупрочнения [6]. Даны оценки напряженно-деформированного состояния в окрестности вершины.

Литература

1. Клюшников, В.Д. Математическая теория пластичности / В.Д. Клюшников. МГУ, 1979. – 208 с.
1. Талыпов, Г.Б. Пластичность и прочность стали при сложных нагрузках / Г.Б. Талыпов. ЛГУ, 1968.
2. Эшби, И.Ф. Физика прочности и пластичности / И.Ф. Эшби. – М.: 1972. – С. 88–107.
3. Хирш, Дж. Теория дислокаций / Дж. Хирш, И. Лоте М.: Атомиздат, 1972. – 599 с.
4. Бастун, В.Н. К определению связей между напряжениями и деформациями при сложных процессах нагружения на основе учета деформационного упрочнения материала / В.Н. Бастун, Л.М. Шкарапута. – Пробл. прочности, 1987. – № 6. – С. 49–54.