РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О НЕЗАВИСИМОЙ $\{K_1,K_2\}$-УПАКОВКЕ НАИБОЛЬШЕГО ВЕСА В КЛАССЕ ГРАФОВ С ОГРАНИЧЕННОЙ ДРЕВЕСНОЙ ШИРИНОЙ

Лепин В. В., Лапина А. В.

Институт математики НАН Беларуси, Минск, Беларусь,
e-mail: lepin@im.bas-net.by

Рассматриваются неориентированные графы $G = (V, E)$ без петель и кратных ребер.

Подмножество вершин $U \subseteq V$ называется *диссоциирующим множеством* графа G, если максимальная степень вершин в подграфе $G[U]$ не превосходит 1.

Подмножество ребер графа G называется *паросочетанием*, если ни какие два ребра из этого множества не имеют общей концевой вершины. *Индуцированным паросочетанием* называется паросочетание $F \neq \emptyset$, в котором ни какие два ребра не соединены ребром графа G.

Пусть $\mathbf{H}$ – фиксированное множество связных графов и G – произвольный граф. Множество $\mathbf{S} = \{G_1, G_2, \ldots, G_m\}$ подграфов графа G называется $\mathbf{H}$*-упаковкой* графа G, если для каждого $G_i \in \mathbf{S}$ существует такой граф $H \in \mathbf{H}$, что $G_i \cong H$ и для расстояния $d(G_i, G_j)$ между любыми двумя подграфами $G_i, G_j \in \mathbf{S}$, $i \neq j$, выполняется $d(G_i, G_j) \geq 1$. *Независимой* $\mathbf{H}-$*упаковкой* графа G называется $\mathbf{H}$-упаковка $\mathbf{S}$, в которой для любых двух подграфов $G_i, G_j \in \mathbf{S}$, $i \neq j$, выполняется $d(G_i, G_j) \geq 2$.

Если множество $\mathbf{S}$ является независимой $\{K_1, K_2\}$-упаковкой графа G, то его можно разбить на два подмножества: $\mathbf{S} = \mathbf{S}_1 \cup \mathbf{S}_2$, где $\mathbf{S}_1 = \{G_i \in \mathbf{S} : G_i \cong K_1\}$, и $\mathbf{S}_2 = \{G_i \in \mathbf{S} : G_i \cong K_2\}$. Более того, множество подграфов $\mathbf{S}$ можно однозначно восстановить, зная пару множеств (U, F), где $U = \bigcup_{G_i \in \mathbf{S}_1} V(G_i)$, и $F = \bigcup_{G_i \in \mathbf{S}_2} E(G_i)$.

Пусть граф G задан вместе с весовыми функциями на вершинах и ребрах: $\omega_V : V(G) \to \mathrm{N}$ и $\omega_E : E(G) \to \mathrm{N}$. Пусть $\mathbf{S}$ – $\{K_1, K_2\}$-упаковка графа G. Во взвешенной задаче о независимой $\{K_1, K_2\}$-упаковке графа требуется найти $\{K_1, K_2\}$-упаковку (U, F), графа G, на которой достигает максимума следующая функция:

$$\varpi(G, U, F, \omega_V, \omega_E) = \sum_{v \in U} \omega_V(v) + \sum_{e \in F} \omega_E(e).$$

(полагают, что $\varpi(G, \emptyset, \omega_V, \omega_E) = 0$).

Задача является NP-трудной и решается эффективно в некоторых классах графов [1, 2].

Если $\omega_V(u) = 0$ $(\omega_V(u) = 1)$ для каждой вершины $u \in V(G)$, а $\omega_E(e) = 1$ $(\omega_E(e) = 2)$ для каждого ребра $e \in E(G)$ и (U^*, F^*) – независимая $\{K_1, K_2\}$–упаковка графа G

наибольшего веса, то F^* является наибольшим индуцированным паросочетанием ($U^* \cup V(F^*)$ –наибольшим диссоциирующим множеством) в графе G.

Теорема. Если дан взвешенный граф G=(V,E) и его древесная декомпозиция (X,T), то наибольший вес $\{K_1, K_2\}$-упаковки графа G можно вычислить за время O(3^{2w} n), где n – число узлов в T, а w – ширина древесной декомпозиции (X,T).

Литература

1. Лепин, В.В. Алгоритмы для нахождения независимой {K1,K2}-упаковки наибольшего веса в графе / В. В. Лепин // Труды Института математики. – 2014. – Т. 22, № 1. – С. 78-97.