МНОГОГРАННИКИ В ЛИНЕЙНОМ ПРОГРАММИРОВАНИИ

С. Ф. Митенева

Вологодский государственный педагогический университет
Вологда, Россия
E-mail: mitenevasf@mail.ru

В статье рассматривается применение теории многогранников в прикладной математике. Автором выделены этапы прикладных математических исследований, приведены примеры задач линейного программирования.

Ключевые слова: многогранники, задачи, линейное программирование, развитие способностей учащихся.

Тема «Многогранники» – одна из основных в традиционном курсе школьной геометрии. Они составляют, можно сказать, центральный предмет стереометрии. Один из увлекательных разделов геометрии – теория многогранников. Первые упоминания о многогранниках известны еще у египтян и вавилонян за 3000 лет до нашей эры. В то же время теория многогранников – современный раздел математики. Многогранники интересны сами по себе. Они выделяются необычными свойствами, самое яркое из которых формируется в теореме Эйлера о числе граней, вершин и ребер выпуклого многогранника. Многогранники имеют красивые формы, например, правильные, полуправильные и звездчатые многогранники. Они обладают богатой историей, которая связана с такими знаменитыми учеными древности, как Пифагор, Евклид, Архимед.

Многогранникам должно быть уделено в школьном курсе больше внимания потому, что они дают особенно богатый материал для развития пространственных представлений, для развития того соединения живого пространственного воображения со строгой логикой, которое составляет сущность геометрии.

Ярким примером применения теории многогранников является ее использование в прикладной математике, в частности в линейном программировании.

Выпуклые многогранники можно трактовать аналитически – с помощью системы линейных неравенств. Линейная функция, рассматриваемая на таком выпуклом многограннике, достигает своего наибольшего (наименьшего) значения в одной из его вершин, либо на некотором ребре, либо на некоторой грани. В любом случае существует вершина (хотя бы одна), в которой достигается это наибольшее (наименьшее) значение. Найти максимум (минимум) линейной функции на многограннике можно алгебраически: найдя координаты всех вершин многогранника, вычислить значение рассматриваемой линейной функции во всех вершинах и выбрать среди них наибольшее (наименьшее).

Оказалось, что к этой задаче приводят многие практические задачи, связанные с нахождением наиболее выгодных способов различных перевозок, раскроя ткани, наиболее эффективных режимов работы предприятий, задачи на составление производственных планов и другие задачи математической экономики, связанные с поиском способов оптимального распределения использования органических ресурсов. Впервые такую конкретную задачу решил отечественный математик, академик Л. В. Канторович (1912–1986). В своей книге «Математические методы организации и планирования производства» он заложил основы того, что ныне называется математической экономикой. Методы, развитые Канторовичем, положили начало новому направлению прикладной математики – линейному программированию, изучающему численные методы решения задач отыскания наибольшего и наименьшего значений линейной функции на выпуклом многограннике.

Обычно в прикладных математических исследованиях условно выделяют следующие основные взаимно связанные этапы:

1. Математическая формулировка задачи — построение математической модели.
2. Выбор метода исследования полученной математической модели.
3. Проведение математического исследования.
4. Анализ и реальная интерпретация полученного математического результата.

Рассмотрим примеры построения математических моделей в задачах линейного программирования.

1. Задача о диете

Эта задача о составлении наиболее экономного, т. е. дешевого, рациона питания, удовлетворяющего определенным медицинским требованиям. Предполагается, что имеется перечень из n наименований продуктов. Обозначим их F_1, F_2, …, F_n. Известно также, что эти продукты обладают некоторыми характеристиками, например, наличием витаминов, минеральных веществ, жиров, белков, углеводов и т. д. Обозначим их N_1, N_2, ..., N_m.

Пусть для каждого продукта F_i известно наличие в нем каждого компонента N_i. Обозначим это количество a_{ij}.

Допустим, что составлен рацион питания. Количество каждого продукта F_i, входящего в него, обозначим x_i. Тогда компонент N_j будет присутствовать в этом рационе в количестве

$$a_{1j}x_1 + a_{2j}x_2 + \ldots + a_{nj}x_n .$$

Допустим, что имеются вполне определенные медицинские требования, касающиеся общего количества потребления каждого из компонентов N_j, а именно

$$a_{1j}x_1 + a_{2j}x_2 + \ldots + a_{nj}x_n \geq b. \qquad (1)$$

Таким образом, b_j указывает минимальное количество компонента N_j в рационе.

Заметим, что кроме неравенств (1) выполняются также неравенства

$$x_i \geq 0 \qquad (2)$$

Пусть цена продукта F_i равна c_i. Тогда стоимость всего рациона питания будет выражаться формулой $F = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i$. Таким образом, задача о диете сводится к нахождению минимума функции F, где x_i удовлетворяют неравенствам (1) и (2).

2. Транспортная задача

Эта задача о составлении наиболее экономного плана перевозок. Пусть имеется n пунктов S_1, S_2, …, S_n производства однородного продукта, причем объем производства в пункте S_i составляет a единиц продукта. Произведенный продукт потребляется в пунктах Q_1, Q_2, …, Q_m, и потребность в нем в пункте Q_j составляет b_j единиц. Требуется составить план перевозок из пунктов S_i в пункты Q_j, чтобы удовлетворить потребности в продуктах b_j, и минимизировать транспортные расходы.

Пусть стоимость перевозок одной единицы продукта из пункта S_i в пункт Q_j равна c_{ij}. Накладывая условие линейности, будем считать, что при перевозке x_{ij} единиц продукта из пункта S_i в пункт Q_j транспортные расходы равны $c_{ij}x_{ij}$. Следовательно, общие транспортные расходы составят величину

$$F = \sum_{n=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} c_{ij} x_{ij} .$$

Найдем условия, которым должны удовлетворять числа x_{ij}. Поскольку из пункта S_i во все пункты Q_j вывозится все количество произведенного продукта, то должно выполняться равенство

$$\sum_{j=1}^{m} x_{ij} = a_i . \qquad (3)$$

Так как в каждый пункт Q_j из пунктов S_i, завозится b_j единиц продукта, то должно выполняться равенство

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = b_j . \qquad (4)$$

Кроме этого, выполняются неравенства

$$x_{ij} \geq 0. \qquad (5)$$

Таким образом, транспортная задача сводится к нахождению такого набора чисел x_{ij}, который удовлетворяет ограничениям (3), (4), (5) и при котором функция F принимает минимальное значение.

Другими задачами линейного программирования являются:

1. Составление плана производства.
2. Расстановка игроков в спортивной команде.
3. Рациональное использование посевных площадей.
4. Составление химической смеси.

Несмотря на различные содержательные ситуации в рассмотренных задачах, математические модели, их описывающие, имеют много общего. Так, в каждой из этих задач требуется найти наибольшее или наименьшее значение линейной функции. При этом ограничения, наложенные на совокупность переменных, являются либо линейными неравенствами, либо линейными уравнениями.

Если число переменных равно двум или трем, то такую задачу можно решить графически. В случае двух переменных значения функции ищут на выпуклом многоугольнике, в случае трех – на выпуклом многограннике.

Задача 1. Дана прямоугольная система координат.

Что представляет собой множество всех точек, координаты которых удовлетворяют условиям:

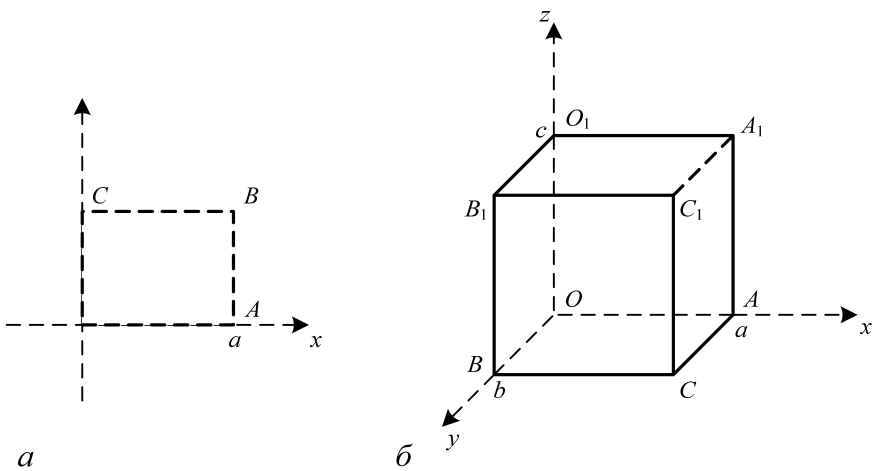
а) $0 \le x \le a$, $0 \le y \le b$;

б) $0 \le x \le a$, $0 \le y \le b$, $0 \le z \le c$?

Решение

а) Искомым множеством является заштрихованный прямоугольник $OABC$ (рис. 1, *а*).

б) Искомым множеством является прямоугольный параллелепипед $AOBCA_1O_1B_1C_1$ (рис. 1, *б*).



а *б*

Рис. 1

Задача 2. Найдем множество точек пространства, определяемое следующей системой неравенств:

$$x \ge 0,\ y \ge 0,\ z \ge 0, \quad (6)$$

$$x \le 8,\ y \le 8,\ z \le 8, \quad (7)$$

$$x + y + z = 12. \quad (8)$$

Решение. Множество точек, удовлетворяющих неравенствам (6) и (7), определяет куб $AOCBA_1O_1C_1B_1$. Неравенство (8) определяет полупространство, пересечение которого с названным кубом определяет фигуру $B_1BEFA_1KLC_1MN$ (рис. 2).

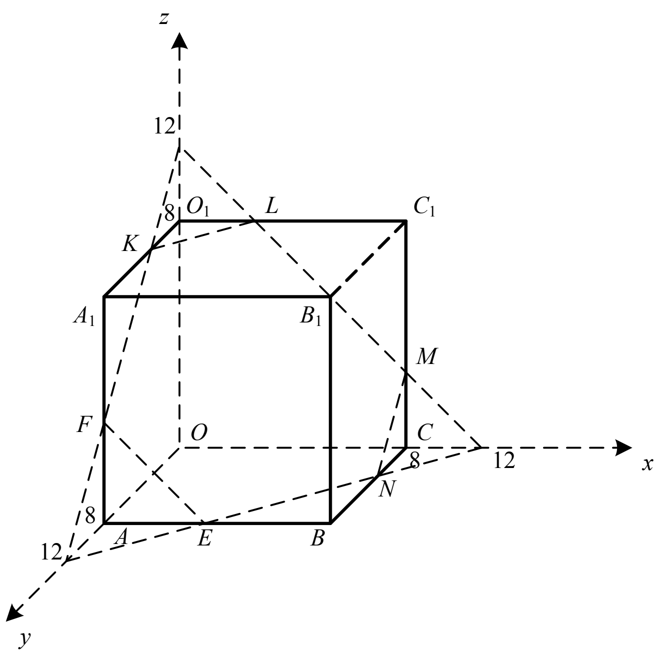


Рис. 2

Таким образом, изучение многогранников способствует развитию пространственного воображения и содержательного логического мышления. Построение чертежей помогает повысить графическую культуру и выработать аккуратность их оформления у школьников. С учащимися можно очень долго рассматривать интересную, захватывающую историю многогранников и узнавать о них много нового.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Смирнова, И. М.* В мире многогранников / И. М. Смирнова. М. : Просвещение, 1995. 144 с.
2. *Смирнова, И. М.* Геометрия: учеб. пособие для 10–11 кл. ест.-науч. профиля обучения / И. М. Смирнова, В. А. Смирнов. М. : Просвещение, 2001. 239 с.