ВОПРОСЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБОСНОВАНИЯ В РЕШЕНИИ ЗАДАЧИ О ПОТРЕБИТЕЛЬСКОМ ВЫБОРЕ

Прокашева В.А.
Белорусский государственный университет, г. Минск, Республика Беларусь
Третьякова Л.Г.
Государственный институт управления и социальных технологий БГУ, г. Минск, Республика Беларусь

В курсе микроэкономики одной из ведущих тем является задача о потребительском выборе.

Модель потребительского выбора описывает задачу выбора такого потребительского набора $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$, который максимизирует функцию полезности цен заданном бюджетном ограничении:

$$\begin{cases} u(x_1, x_2, \dots, x_n) \to \max \\ p_1x_1 + p_2x_2 + \dots + p_nx_n = I; \\ x_i \geq 0 \quad i = \overline{1, n}, \end{cases} \quad (1)$$

где $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ – потребительский набор n благ; $(p_1, p_2, \dots, p_n)$ – вектор цен, I – доход, $u(x_1, x_2, \dots, x_n)$ – функция полезности, характеризующая потребительскую оценку набора благ $(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

С математической точки зрения, задача (1) является задачей на условный экстремум. Одним из методов ее решения является метод Лагранжа, при котором функция Лагранжа

$$L(x_1, x_2, \dots, x_n, \lambda) = u(x_1, x_2, \dots, x_n) + \lambda(p_1x_1 + p_nx_n - I) \quad (2)$$

исследуется на безусловный экстремум. Необходимым условием экстремума функции Лагранжа $L(x_1, x_2, \dots, x_n, \lambda)$ (2) является равенство нулю ее первых частных производных:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L(x_1, \dots, x_n, \lambda)}{\partial x_i} = \dfrac{\partial u(x_1, \dots, x_n)}{\partial x_i} + \lambda p_i = 0, \qquad i = \overline{1, n} \\ \dfrac{\partial L(x_1, \dots, x_n, \lambda)}{\partial \lambda} = p_1x_1 + \dots + p_nx_n - I = 0. \end{cases} \quad (3)$$

Однако не каждая точка, подозрительная на экстремум, является точкой экстремума. Необходимо проверить еще выполнения достаточного условия: какой знак в этой точке имеет дифференциал второго порядка функции Лагранжа.

Проверка этого условия является достаточно сложной и опускается в экономической литературе [1, с. 128–129, 142–143], где из каких-то интуитивных соображений делается вывод об окончательном решении задачи (1).

В качестве иллюстрации рассмотрим следующий пример:

$$\begin{cases} u(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n \to \max \\ p_1x_1 + p_2x_2 + \dots + p_nx_n = I \\ x_i \geq 0, \qquad i = \overline{1, n}. \end{cases} \quad (4)$$

Для решения задачи (4) составим функцию Лагранжа: $L(x_1, x_2, \dots, x_n, \lambda) = x_1x_2 \cdot x_n + \lambda(p_1x_1 + p_2x_2 + p_nx_n - I)$, которую будем исследовать на безусловный экстремум. Для этого проверим выполнение необходимого условия экстремума:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L(x_1, x_2, \dots, x_n, \lambda)}{\partial x_1} = x_2x_3 \cdot \dots \cdot x_n + \lambda p_1 = 0 \\ \dfrac{\partial L(x_1, x_2, \dots, x_n, \lambda)}{\partial x_2} = x_1x_3x_4 \cdot \dots \cdot x_n + \lambda p_2 = 0 \\ \dots \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L(x_1, x_2, \dots, x_n, \lambda)}{\partial x_n} = x_1x_2 \cdot \dots \cdot x_{n-1} + \lambda p_n = 0 \\ \dfrac{\partial L(x_1, x_2, \dots, x_n, \lambda)}{\partial \lambda} = p_1x_1 + p_2x_2 + \dots + p_nx_n - I = 0. \end{cases}$$

Тогда точка $\left(\dfrac{I}{np_1}, \dots, \dfrac{I}{np_2}, -\dfrac{I^{n-1}}{n^{n-1}p_1p_2 \dots p_n}\right)$ является точкой, подозрительной на экстремум. Проверим выполнение достаточного условия экстремума:

$$d^2(L(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0, \lambda^0)) < 0 \quad (5)$$

при условии, что

$$p_1dx_1 + p_2dx_2 + \dots + p_ndx_n = 0. \quad (6)$$

Итак,

$$d^2\big(u(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)\big) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 L(x_1^0, \dots, x_n^0, \lambda^0)}{\partial x_i^2}(dx_i)^2 +$$

$$+ \frac{\partial^2 L(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0, \lambda^0)}{\partial x_i^2}(d\lambda)^2 +$$

$$\sum_{i \neq j} 2\frac{d^2 L(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0, \lambda^0)}{\partial x_i \partial x_j} dx_i dx_j +$$

$$+2\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 L(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0, \lambda^0)}{\partial x_i \partial \lambda} dx_i d\lambda =$$

$$= \sum_{i \neq j} 2\frac{\partial^2 L(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0, \lambda^0)}{\partial x_i \partial x_j} dx_i dx_j,$$

т. к. $\dfrac{d^2 L(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0, \lambda^0)}{\partial x_i^2} = 0$; $\dfrac{d^2 L(x_1^0, \dots, \lambda^0)}{\partial \lambda^0} = 0$;

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 L(x_1^0, \dots, \lambda^0)}{\partial x_i \partial \lambda} dx_i = 0.$$

Кроме того, из условия (6) имеем, что $\sum_{i=j} 2p_ip_j\,dx_i\,dx_j = -\sum_{i=1}^{n} p_i^2\,(dx_i)^2$, тогда

$$d^2 L(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0, \lambda^0) = \frac{-I^{n-2}}{p_1p_{2 \dots}p_n} \sum_{i=1}^{n} p_i^2 (dx_i)^2 < 0.$$

Итак, точка $\left(\dfrac{I}{np_1}, \dots, \dfrac{I}{np_n}\right)$ является точкой максимума функции полезности $u(x_1, \dots, x_n) = x_1 \cdot \dots \cdot x_n$, при этом расход на каждое благо равен $\dfrac{I}{n}$ и количество каждого блага вычисляется по формуле $x_i = \frac{I}{np_i}, i = \overline{1, n}$.

Следует обратить внимание, что даже в иллюстративном примере проверка выполнения достаточного условия является сложной и требует углубленного понимания математического аппарата.

Использование метода Лагранжа требует его понимания, умения находить частные производные, решать систему уравнений, анализировать полученные результаты как с математической, так и с экономической точек зрения. Названные темы включены в курс «Высшей математики» при подготовке менеджеров. В ходе учебного процесса постоянно акцентируется внимание студентов на важность данного материала в решении задач прикладного характера,

Литература

1. *Замков, О.О.* Математические методы в экономике : учебник / О.О. Замков, А.В. Толстопятенко, Ю.Н. Черемных ; под общ. ред. А.В. Сидоровича; МГУ им. М.В. Ломоносова. – 3-е изд., перераб. – М. : Дело и Сервис, 2001. – 368 с. – (Серия «Учебники МГУ им. М.В. Ломоносова»).