ПРИМЕНЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЭКОНОМИКЕ

К. Шило *(ГИУСТ БГУ)*
Научный руководитель:
кандидат физ.-мат. наук, доцент ***Л.Г. Третьякова***

Наиболее часто встречающиеся математические модели в экономике связаны с дифференциальными уравнениями.

Рассмотрим два таких примера-иллюстрации, связывающих учебные курсы «Высшей математики» и «Экономической теории».

Пример 1. Модель рынка с прогнозируемыми ценами.

Рассмотрим равновесный рынок в предположении, что спрос s и предложение q определяются только ценой $p(t)$. При увеличении цены предложение растет. Вместе с тем предложение положительно реагирует на скорость изменения цены $p'(t)$ и на темп роста цены $p''(t)$ в предположении, что $p(t)$ – дважды непрерывно дифференцируемая функция. Таким образом, получаем уравнение предложения

$$q(t) = ap'' + bp' + cp + q_0,$$

где a, b, c – положительные коэффициенты пропорциональности, q_0 – начальное предложение.

Увеличение цены отрицательно влияет на спрос, скорость роста цены также влияет на интерес к товару. Однако если при всем этом скорость роста цены увеличивается, т. е. темп роста положителен, то это подогревает интерес к товару. Получаем уравнение спроса

$$s(t) = \alpha p'' - \beta p' - \gamma p + s_0,$$

где α, β, γ – положительные коэффициенты пропорциональности, s_0 – начальный спрос.

Условие равновесия рынка приводит к равенству $q(t) = s(t)$, которое равносильно уравнению

$$ap'' + bp' + cp + q_0 = \alpha p'' - \beta p' - \gamma p + s_0$$

или

$$(a - \alpha)p'' - (b + \beta)p' + (c + \gamma)p - s_0 - q_0.$$

Это линейное ДУ второго порядка с постоянными коэффициентами представляет собой математическую модель рынка с прогнозируемыми ценами.

Рассмотрим конкретный пример такой модели. Пусть функции предложения и спроса имеют следующие зависимости от цены:

$$\begin{aligned} q(t) &= 4p'' + p' + 3p + 3; \\ s(t) &= 3p'' - p' - 2p + 18. \end{aligned} \tag{1}$$

Еще раз подчеркнем, что отрицательные знаки коэффициентов при p' и p в функции спроса $s(t)$ говорят о том, что быстрый рост цены отпугивает покупателя, а положительные знаки коэффициентов при p' и p в функции предложения $q(t)$ говорят о том, что рост цены увеличивает предложение.

Установим зависимость цены от времени. Для этого, используя равновесное состояние рынка, получим ДУ

$$4p'' + p' + 3p + 3 = 3p'' - p' - 2p + 18$$

или

$$p'' + 2p' + 5p = 15. \tag{2}$$

Для решения неоднородного линейного ДУ(2) рассмотрим сначала однородное дифференциальное уравнение:

$$p'' + 2p' + 5p = 0. \tag{3}$$

Для нахождения его решения составим характеристическое уравнение

$$k^2 + 2k + 5 = 0,$$

корнями которого являются комплексно сопряженные числа: $k_{1,2} = -1 \pm 2i$.

Тогда общее решение однородного ЛДУ имеет вид:

$$p_{\text{общ.}}(t) = e^{-t}(c_1 \sin 2t + c_2 \cos 2t),$$

где c_1, c_2 – произвольные постоянные.

В качестве частного решения неоднородного ЛДУ возьмем $p(t) = A$ – постоянную величину как установившуюся цену. Подстановка в уравнение (2) дает значение $A = 3$. Таким образом, общее решение уравнения (2) имеет вид:

$$p(t) = e^{-t}(c_1 \sin 2t + c_2 \cos 2t) + 3.$$

Если задать начальные условия, например: $p_0 = p(0) = 2$, $q_0 = q(0) = 30$, то можно однозначно определить постоянные c_1, c_2 : $c_1 = -2$, $c_2 = 1$.

В итоге функция $p(t) = e^{-t}(-2\sin 2t + \cos 2t) + 3$.

Заметим, что $\lim\limits_{t \to +\infty} p(t) = 3$, т.е. все интегральные кривые (4) имеют горизонтальную асимптоту $p = 3$ и колеблются вокруг нее. Это означает, что все цены стремятся к установившейся цене $p = 3$ с колебаниями около нее, причем амплитуда этих колебаний затухает со временем.

Пример 2. Математическая модель рекламы.

Средства массовой информации дают рекламные объявления для ускорения сбыта некоторой продукции, которая есть в продаже. По какому закону распространяется известие о наличии продукции?

Пусть N – число потенциальных покупателей данной продукции и в момент времени t об ее наличии в продаже знают $y(t)$ покупателей. Хотя на самом деле число покупателей целое, мы будем считать, что $y(t)$ изменяется непрерывно.

Статистика показывает, что с большой степенью достоверности скорость изменения функции $y(t)$ прямо пропорциональна как числу знающих о продаже, так и числу незнающих, т. е.

$$y' = ky(t)(N - y(t)),$$

где положительное число k – коэффициент пропорциональности – определяется экспериментально и зависит от интенсивности рекламы и скорости распространения слухов.

Найдем общее решение последнего уравнения с разделяющимися переменными. Разделим переменные

$$\frac{y'}{y(t)(y(t) - N)} = -k,$$

Интегрируя полученное ДУ, находим, что

$$y(t) = \frac{N}{1 + C_1 e^{-kNt}},$$

где C_1 – произвольная постоянная.

Если начальное условие имеет вид $y(0) = \frac{N}{2}$, то получим интегральную кривую, которая в экономической литературе называется логической кривой. Ее поведение можно исследовать методами математического анализа.

Замечание. Логистическая кривая также описывает рост рынка в условиях конкуренции, динамику эпидемий, процессы размножения бактерий в ограниченной среде обитания и т. д.

Литература

1. *Минюк, С.А.* Высшая математика для экономистов / С.А. Минюк, С.А. Самаль, Л.И. Шевченко. – Минск: Элайда, 2007. – 511 с.

2. *Кастрица, О.А.* Высшая математика для экономистов / О.А. Кастрица. – Минск: ООО Новое знание, 2006. – 490 с.

3. *Веремеенко, Т.В.* Высшая математика / Т.В. Веремееенко. – Минск: ГИУСТ БГУ, 2002. – Ч. 2.