МЕТОД ЛАГРАНЖА В ЭКОНОМИЧЕСКИХ ИССЛЕДОВАНИЯХ

С. Лобач *(ГИУСТ БГУ)*
Научный руководитель:
кандидат физ.-мат. наук, доцент ***Л.Г. Третьякова***

Применяя метод Лагранжа для вычисления условных экстремумов в экономических исследованиях, мы можем находить экстремальные (т. е. максимальные или минимальные) значения экономических показателей, таких как максимальная полезность набора товаров, минимальные издержки производства, максимальная прибыль и др., а также решать задачи на оптимизацию производственных процессов.

Пример 1. Полезность набора товаров X и Y определяется функцией $u(x, y) = \ln x + \ln y$. Для дохода I и цен на товары $p_{x,}$ p_y требуется:

а) найти спрос на X и Y;

б) найти компенсированный спрос на X и Y;

в) выяснить, являются ли товары X и Y взаимозаменяемыми.

Решение. 1. Чтобы найти точку максимума $u(x,y)$ при бюджетном ограничении $xp_x + yp_y < I$**,** составим функцию Лагранжа

$$L = \ln x + \ln y + \lambda(I - x_x - x_y)$$

и приравняем ее частные производные нулю:

$$L_x = x^{-1} - \lambda p_x = 0,\ \ L_y = y^{-1} - \lambda p_y = 0. \qquad (1)$$

Потребуем также, чтобы выполнялись условия:

$$\lambda(I - xp_x - xp_y) = 0,\ \ \lambda \geq 0. \qquad (2)$$

Из (1), (2) находим: $\lambda = 2I^{-1}$, $x = I(2\ p_x)^{-1}$, $y = I(2\ p_y)^{-1}$. Точка $(x^*, y^*) = (I(2\ p_x)^{-1}, I(2\ p_y)^{-1})$ удовлетворяет условиям (1), (2) и является точкой глобального максимума функции полезности при бюджетном ограничении. Таким образом, имеем функции спроса:

$$x^D = \frac{I}{2p_x},\ \ y^D = \frac{I}{2p_y}.$$

2. Чтобы найти минимум функции $xp_x + yp_y$ при условии $\ln x + \ln y \geq U,$ составим функцию Лагранжа $L = -xp_x - xp_y + \lambda(\ln x + \ln y - U)$.

Потребуем, чтобы выполнялись условия:

$$L_x = -p_x + \frac{\lambda}{x} = 0, \; L_y = -p_y + \frac{\lambda}{y} = 0, \tag{3}$$

$$\lambda(\ln x + \ln y - U) = 0, \; \lambda \geq 0. \tag{4}$$

Из (3), (4) находим:

$$\lambda = e^{\frac{U}{2}}\sqrt{p_x p_y}, \; x = e^{\frac{U}{2}}\sqrt{\frac{p_y}{p_x}}, \; y = e^{\frac{U}{2}}\sqrt{\frac{p_x}{p_y}}.$$

Точка $(x_0, y_0) = (e^{\frac{U}{2}}\sqrt{\frac{p_y}{p_x}}, e^{\frac{U}{2}}\sqrt{\frac{p_x}{p_y}})$ удовлетворяет условиям (3), (4) и является точкой глобального минимума функции $xp_x + yp_y$ при условии $\ln x + \ln y \geq U$. Функции компенсированного спроса имеют вид:

$$x^c = e^{\frac{U}{2}}\sqrt{\frac{p_y}{p_x}}, \; y^c = e^{\frac{U}{2}}\sqrt{\frac{p_x}{p_y}}.$$

3. Имеем $\frac{\partial y^c}{\partial p_x} = \frac{\partial x^c}{\partial p_y} = \frac{e^{\frac{U}{2}}}{2\sqrt{p_x p_y}}$, т. е. товары X и Y взаимозаменяемые.

Пример 2. Полезность товаров X, Y, Z задается функцией $u(x, y, z) = \ln x + \ln(\min\{y, x\})$. Будут ли товары Y, Z взаимозаменяемыми?

Решение. Пусть p_x, p_y, p_z – цены товаров X, Y, Z; (x_0, y_0, z_0) – точка минимума функции $xp_x + yp_y + zp_z$ при условии $u(x, y, z) \geq U$. Из вида функции полезности ясно, что $y_0 = z_0$, поэтому поиск точек (x_0, y_0, z_0) сводится к поиску точек минимума функции $xp_x + y(p_y + p_z)$ при условии $\ln x + \ln y \geq U$. Данная задача была решена в предыдущем примере, откуда имеем

$$(x_0, y_0, z_0) = (e^{\frac{U}{2}}\sqrt{\frac{p_y + p_z}{p_x}}, \; e^{\frac{U}{2}}\sqrt{\frac{p_x}{p_y + p_z}}, \; e^{\frac{U}{2}}\sqrt{\frac{p_x}{p_y + p_z}}).$$

Следовательно, $y^c = e^{\frac{U}{2}}\sqrt{\frac{p_x}{p_y + p_z}}, \; z^c = \sqrt{\frac{p_x}{p_y + p_z}})$.

$\frac{\partial y^c}{\partial p_z} = \frac{\partial z^c}{\partial p_y} = -\frac{1}{2}e^{\frac{U}{2}}\sqrt{\frac{p_x}{(p_y + p_z)^3}} < 0,$ т. е. товары Y, Z взаимодополняющие.

Литература

1. *Солодовников, А.С.* Математика в экономике / А.С. Солодовников. – М., 2005. – 305 с.