УДК 517.968

Г. А. РАСОЛЬКО

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО РОДА С ДВУКРАТНЫМ ЯДРОМ КОШИ МЕТОДОМ ОРТОГОНАЛЬНЫХ МНОГОЧЛЕНОВ

Рассмотрен спектральный метод решения интегральных уравнений вида

$$\frac{1}{\pi^2}\iint\limits_D \frac{\varphi(t,\tau)}{(t-x)(\tau-y)}dtd\tau+\frac{1}{\pi^2}\iint\limits_D k(x,y,t,\tau)\varphi(t,\tau)dtd\tau=f(x,y),\ (x,y)\in D=[-1,1]\times[-1,1],$$

где k, f – непрерывные по Гёльдеру функции, φ – искомое решение. Предлагаемая схема решения основана на представлении искомого решения в виде линейной комбинации полиномов Чебышева первого рода, а заданных функций k и f в виде разложения по полиномам первого или второго рода. Решение полученной таким образом приближенной задачи сводится к решению системы линейных алгебраических уравнений для коэффициентов полиномиального представления. Предлагаемый метод может быть использован также в случае, когда искомое решение имеет сингулярность и ограничено. Приводятся оценки точности и результаты численного эксперимента, демонстрирующие эффективность предложенного подхода.

Ключевые слова: полиномы Чебышева; ядра Коши; сингулярные уравнения; приближенное решение.

Spectral method for solving singular integral equations of the following form

$$\frac{1}{\pi^2}\iint\limits_D \frac{\varphi(t,\tau)}{(t-x)(\tau-y)}dtd\tau+\frac{1}{\pi^2}\iint\limits_D k(x,y,t,\tau)\varphi(t,\tau)dtd\tau=f(x,y),\ (x,y)\in D=[-1,1]\times[-1,1],$$

is considered. Here k and f are continuous on Hölder functions, φ is solution of the equation. The proposed method is based on representation of the approximate solution of the equation by a linear combination of Chebyshev polynomials of the fist kind, while k and f are represented by Chebyshev polynomials of the first or second kind. As a result the solution of the approximate problem can be found as a solution of a systems of linear equations for coefficients of the polynomial expansion. The proposed scheme can be used also in the case when the solution of the problem is singular and bonded. Accuracy estimates and results of numerical experiments demonstrating efficiency of the proposed approach.

Key words: Chebyshev polynomials; Cauchy-type kernels; singular equations; approximate solutions.

В [1] рассмотрено построение приближенного решения сингулярного интегрального уравнения вида

$$\frac{1}{\pi^2}\iint\limits_D \frac{\varphi(t,\tau)}{(t-x)(\tau-y)}dtd\tau+\frac{1}{\pi^2}\iint\limits_D k(x,y,t,\tau)\varphi(t,\tau)dtd\tau=f(x,y),\quad (x,y)\in D=[-1,1]\times[-1,1], \tag{1}$$

где f, k – заданные функции своих аргументов, непрерывные по Гёльдеру; φ – искомая функция в классе функций, ограниченных на всем замкнутом квадрате D.

В данной статье будем искать решение $\varphi(x,y)$ в классе H^* (по Мусхелишвили [2]). Это означает, что $\varphi(x,y)$ в любой замкнутой области из D, не содержащей граничных точек, принадлежит классу H, а вблизи граничных точек представима в виде $\varphi(x,y)=(x+1)^{\alpha_1}(x-1)^{\beta_1}(y+1)^{\alpha_2}(y-1)^{\beta_2}\varphi_0(x,y)$, где $\varphi_0(x,y)\in H, -1<\alpha_j,\beta_j<0,\ j=1,2.$

Вначале рассмотрим уравнение

$$\frac{1}{\pi^2}\iint\limits_D \frac{\varphi(t,\tau)}{(t-x)(\tau-y)}dtd\tau = f(x,y), \quad (x,y)\in D, \tag{2}$$

где заданная функция $f(x,y)$ принадлежит классу H (классу Гёльдера) по своим переменным.

Присоединим к (2) условия

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\varphi(t,y)dt = g_1(y), -1<y<1, \ \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\varphi(x,\tau)d\tau = g_2(x), -1<x<1, \tag{3}$$

где $g_1(y), g_2(x)-$ заданные функции класса H^*, удовлетворяющие условиям согласования

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}g_1(\tau)d\tau = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}g_2(t)dt = A. \tag{4}$$

Согласно [3] решение задачи (2) – (4) дается формулой

$$\varphi(x,y) = \frac{R_1(f;x,y)}{\sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}} + G(x,y), \tag{5}$$

где

$$G(x,y) = \frac{g_1(y)}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{g_2(x)}{\sqrt{1-y^2}} - \frac{A}{\sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}};$$

$$R_1(f;x,y) = \frac{1}{\pi^2}\iint\limits_D \frac{\sqrt{(1-t^2)(1-\tau^2)}}{(t-x)(\tau-y)}f(t,\tau)dtd\tau. \tag{6}$$

Обратимся теперь к уравнению (1) и присоединим к (1) условия (3). Полагая

$$\varphi(x,y) = \varphi^*(x,y) + \psi(x,y),$$

от задачи (1), (3), (4) придем к двум задачам:

$$\frac{1}{\pi^2}\iint\limits_D \frac{\varphi^*(t,\tau)}{(t-x)(\tau-y)}dtd\tau = 0, \quad (x,y)\in D; \tag{7}$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\varphi^*(t,y)dt = g_1(y), \quad \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\varphi^*(x,\tau)d\tau = g_2(x), -1<x,y<1, \quad \frac{1}{\pi^2}\iint\limits_D \varphi^*(t,\tau) = A; \tag{8}$$

$$\begin{gathered}\frac{1}{\pi^2}\iint\limits_D \frac{\psi(t,\tau)}{(t-x)(\tau-y)}dtd\tau + \frac{1}{\pi^2}\iint\limits_D k(x,y,t,\tau)\,\psi(t,\tau)\,dtd\tau = f^*(x,y), \\ f^*(x,y) = f(x,y) - \frac{1}{\pi^2}\iint\limits_D k(x,y,t,\tau)\,\varphi^*(t,\tau)\,dtd\tau, \ (x,y)\in D,\end{gathered} \tag{9}$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\psi(t,y)dt = 0, \quad \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\psi(x,\tau)d\tau = 0, -1<x,y<1. \tag{10}$$

В соответствии с (5), (6) решение задачи (7), (8) определяется формулой

$$\varphi^*(x,y) = G(x,y),$$

а задача (9), (10) эквивалентна в смысле разрешимости интегральному уравнению Фредгольма

$$u(x,y) + \iint\limits_D N(x,y,t,\tau)u(t,\tau)dtd\tau = F(x,y), \tag{11}$$

где

$$N(x,y,t,\tau) = \frac{1}{\sqrt{(1-t^2)(1-\tau^2)}}\frac{1}{\pi^6}\iint\limits_D \sqrt{(1-\xi^2)(1-\eta^2)}\frac{k(\xi,\eta,t,\tau)d\xi d\eta}{(\xi-x)(\eta-y)};$$

$$F(x,y)=\frac{1}{\pi^2}\iint_D \sqrt{\left(1-\xi^2\right)\left(1-\eta^2\right)}\frac{f^*(\xi,\eta)\,d\xi d\eta}{(\xi-x)(\eta-y)},\quad \psi(x,y)=\frac{u(x,y)}{\sqrt{\left(1-x^2\right)\left(1-y^2\right)}}.$$

Замечание. Можно проверить, что условия (10) для решения $u(x,y)$ уравнения (11) соблюдаются.

Пусть однородное уравнение (11) имеет только нулевое решение. Тогда решение неоднородного уравнения (11) дается формулой

$$u(x,y)=F(x,y)-\iint_D \Gamma(x,y,\xi,\eta)F(\xi,\eta)\,d\xi d\eta,$$

где $\Gamma(x,y,\xi,\eta)$ – резольвента ядра $N(x,y,t,\tau)$.

Теорема 1. *Пусть функции* $k(x,y,t,\tau)$, $f(x,y)$, *входящие в уравнение* (1), *принадлежат классу Гёльдера* (*по всем переменным*), *функции* $g_1(y)$, $g_2(x)$, *входящие в* (8), *принадлежат классу* H^*, *пусть далее однородное уравнение Фредгольма* (11) *имеет только нулевое решение. Тогда задача* (1), (3), (4) *имеет единственное решение, представимое в виде*

$$\varphi(x,y)=\frac{u(x,y)}{\sqrt{\left(1-x^2\right)\left(1-y^2\right)}}+\frac{g_1(y)}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{g_2(x)}{\sqrt{1-y^2}}-\frac{A}{\sqrt{\left(1-x^2\right)\left(1-y^2\right)}},$$

где $u(x,y)-$ *решение задачи* (11).

Введем новые функции:

$$h_1(y)=\sqrt{\left(1-y^2\right)}g_1(y);\; h_2(x)=\sqrt{\left(1-x^2\right)}g_2(x);\; G^*(x,y)=\sqrt{\left(1-x^2\right)\left(1-y^2\right)}G(x,y),$$

т. е. $G^*(x,y)=h_1(y)+h_2(x)-A.$

Построим приближенное решение задачи (9), (10). С этой целью функции нескольких переменных k,f,h_1,h_2 аппроксимируем интерполяционными многочленами, построенными по узлам – нулям многочлена Чебышева первого рода [4, с. 89].

Введем обозначения:

$$\sigma_m=\begin{cases}1, & m=0,1,\ldots,n-2,\\ 0, & m=n-1,n;\end{cases}\qquad \delta_p=\begin{cases}1, & p=0,\\ 2, & p\ge 1;\end{cases}$$

$$x_k=\cos\frac{2k-1}{2n+2}\pi,\ k=1,2,\ldots,n+1;\quad y_k=\cos\frac{2k-1}{2n+2}\pi,\ k=1,2,\ldots,n+1; \tag{12}$$

$$t_q=\cos\frac{2q-1}{2n+4}\pi,\ q=1,2,\ldots,n+2;\quad \tau_q=\cos\frac{2q-1}{2n+4}\pi,\ q=1,2,\ldots,n+2.$$

В следующих представлениях будем использовать обозначения (12):

$$k(x,y,t,\tau)\approx k_{n,n+1}(x,y,t,\tau)=\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n}\sum_{k=0}^{n+1}\sum_{l=0}^{n+1}\alpha_{i,j,k,l}U_i(x)U_j(y)T_k(t)T_l(\tau), \tag{13}$$

где

$$\alpha_{i,j,k,l}=\frac{1}{(n+2)^2(n+1)^2}\sum_{p=1}^{n+1}\left[T_i(x_p)-\sigma_i T_{i+2}(x_p)\right]\sum_{r=1}^{n+1}\left[T_j(y_r)-\sigma_j T_{j+2}(y_r)\right]\sum_{s=1}^{n+2}\delta_k T_k(t_s)\sum_{q=1}^{n+2}\delta_l T_l(\tau_q)k(x_p,y_r,t_s,\tau_q);$$

$$f(x,y)\approx f_n(x,y)=\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n}\beta_{i,j}U_i(x)U_j(y), \tag{14}$$

$$\beta_{i,j}=\frac{1}{(n+1)^2}\sum_{p=1}^{n+1}\left[T_i(x_p)-\sigma_i T_{i+2}(x_p)\right]\sum_{r=1}^{n+1}\left[T_j(y_r)-\sigma_j T_{j+2}(y_r)\right]f(x_p,y_r), \tag{15}$$

$$h_2(x) \approx h_{2,n+1}(x) = \sum_{k=0}^{n+1} \gamma_k^2 T_k(x), \quad \gamma_k^2 = \frac{1}{n+2} \sum_{s=1}^{n+2} \delta_k T_k(t_s) h_2(t_s), \tag{16}$$

и

$$G^*(x,y) \approx G_{n+1}^*(x,y) = h_{1,n+1}(y) + h_{2,n+1}(x) - A,$$

т. е.

$$G_{n+1}^*(x,y) = \sum_{l=0}^{n+1} \gamma_l^1 T_l(y) + \sum_{k=0}^{n+1} \gamma_k^2 T_k(x) - A. \tag{17}$$

В дальнейшем нам понадобится формула

$$I_k = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{1} \frac{T_k(t)dt}{\sqrt{1-t^2}} = \begin{cases} 1, & k = 0, \\ 0, & k \neq 0. \end{cases} \tag{18}$$

Приближенное решение задачи (9), (10) найдем как точное решение задачи

$$\frac{1}{\pi^2} \iint_D \frac{u_{n+1}(t,\tau)}{\sqrt{(1-t^2)(1-\tau^2)}} \frac{dt d\tau}{(t-x)(\tau-y)} + \frac{1}{\pi^2} \iint_D k_{n,n+1}(x,y,t,\tau) \frac{u_{n+1}(t,\tau)}{\sqrt{(1-t^2)(1-\tau^2)}} dt d\tau = F_n(x,y), \tag{19}$$

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^{1} \frac{u_{n+1}(t,y)}{\sqrt{1-t^2}} dt = 0, -1 < y < 1, \quad \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{1} \frac{u_{n+1}(x,\tau)}{\sqrt{1-\tau^2}} d\tau = 0, -1 < x < 1, \tag{20}$$

где

$$F_n(x,y) = f_n(x,y) - \frac{1}{\pi^2} \iint_D k_{n,n+1}(x,y,t,\tau) G_{n+1}^*(t,\tau) \frac{dt d\tau}{\sqrt{(1-t^2)(1-\tau^2)}},$$

$$u_{n+1}(x,y) = \sum_{p=0}^{n+1} \sum_{r=0}^{n+1} c_{p,r} T_p(x) T_r(y),$$

$c_{p,r}\ (p,r = 0,1,\ \ldots, n+1)$ – коэффициенты, подлежащие нахождению.

Применяя в (19) аддитивные свойства интеграла и переходя от кратных интегралов к повторным, пользуясь спектральными соотношениями [5]:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^{1} \frac{T_n(t)}{\sqrt{1-t^2}} \frac{dt}{t-x} = U_{n-1}(x), \qquad \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{1} \sqrt{1-t^2} U_{n-1}(t) \frac{dt}{t-x} = -T_n(x),$$
$$|x| < 1, \quad n = 0,1,2,\ \ldots,$$

формулами $2T_k(x)T_p(x) = T_{k-p}(x) + T_{k+p}(x)$ и (18), а также аппроксимациями (13) – (17), от (19) придем к равенствам

$$\begin{gathered} \sum_{p=1}^{n+1} \sum_{r=1}^{n+1} c_{p,r} U_{p-1}(x) U_{r-1}(y) + \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{n} \sum_{k=0}^{n+1} \sum_{l=0}^{n+1} \alpha_{i,j,k,l} U_i(x) U_j(y) \times \\ \times \sum_{p=0}^{n+1} \sum_{r=0}^{n+1} c_{p,r} \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{1} \frac{T_k(t) T_p(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{1} \frac{T_l(\tau) T_r(\tau)}{\sqrt{1-\tau^2}} d\tau = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{n} \beta_{i,j}^* U_i(x) U_j(y), \end{gathered} \tag{21}$$

$$\beta_{i,j}^* = \beta_{i,j} - \frac{1}{2} \sum_{l=0}^{n+1} \alpha_{i,j,0,l} \sum_{q=0}^{n+1} \gamma_q^1 \left(I_{|l-q|} + I_{l+q} \right) - \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n+1} \alpha_{i,j,k,0} \sum_{s=0}^{n+1} \gamma_s^2 \left(I_{|k-s|} + I_{k+s} \right) + \alpha_{i,j,0,0} A.$$

Приравнивая в коэффициенты при одинаковых многочленах $U_i(x), U_j(y)$, для нахождения $c_{p,r}\ (p,r = 0,1,\ldots, n+1)$ получим систему линейных алгебраических уравнений

$$c_{i+1,j+1}+\sum_{p=0}^{n+1}\sum_{r=0}^{n+1}c_{p,r}\,\mu_{i,j,p,r}=\beta^*_{i,j},$$
$$i=0,1,\dots,n,\quad j=0,1,\dots,n, \qquad (22)$$

где

$$\mu_{i,j,p,r}=\frac{1}{4}\sum_{k=0}^{n+1}\sum_{l=0}^{n+1}\alpha_{i,j,k,l}\left(I_{|k-p|}+I_{k+p}\right)\left(I_{|l-r|}+I_{l+r}\right),$$
$$i=0,1,\dots,n,\quad j=0,1,\dots,n,\quad p=0,1,\dots,n+1,\quad r=0,1,\dots,n+1.$$

Система (22) содержит $(N+2)^2$ неизвестных и $(N+1)^2$ уравнений, однако, учитывая в (20) тот факт, что многочлены Чебышева образуют на отрезке [–1, 1] линейно независимую систему, из (20) приходим к выводу, что все коэффициенты $c_{p,r}$, имеющие хотя бы один нулевой индекс, равны нулю. Исключив соответствующие столбцы из (22), получаем систему линейных алгебраических уравнений с квадратной матрицей:

$$c_{i+1,j+1}+\sum_{p=1}^{n+1}\sum_{r=1}^{n+1}c_{p,r}\,\mu_{i,j,p,r}=\beta^*_{i,j},\ i=0,1,\dots,n,\quad j=0,1,\dots,n. \qquad (23)$$

Приведем теорему, устанавливающую разрешимость системы (23).

Введем класс функций $W^rH(\mu),\quad r\ge 1,\quad 0<\mu\le 1$.

Полагаем, что функция $f(x,y)\in W^rH(\mu), r\ge 1$, если она по каждой переменной имеет производные до порядка $r\ge 1$ и r-я производная из класса $H(\mu), 0<\mu\le 1$.

Теорема 2. *Пусть выполнены условия теоремы* 1. *Если* $k(x,y,t,\tau)\in W^rH(\mu);\ f(x,y)\in W^rH(\mu);$ $h_1(y)\in W^rH(\mu);\ h_2(x)\in W^rH(\mu), r\ge 1; 0<\mu\le 1,$ *то при достаточно больших* n *система* (23) *разрешима и*

$$\|u(x,y)-u_{n+1}(x,y)\|_C=O\left(\frac{ln^4 n}{n^{r+\mu-2}}\right), r+\mu-2>0.$$

Доказательство проводится по схеме работы [6].

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Расолько Г. А. Приближенное решение интегрального уравнения первого рода с двукратным ядром Коши методом ортогональных многочленов (I) // Вестн. БГУ. Сер. 1, Физика. Математика. Информатика. 2014. № 1. С. 100–104.

2. Мусхелишвили Н. И. Сингулярные интегральные уравнения. М., 1968.

3. Шешко М. А., Расолько Г. А. О точных и приближенных формулах обращения кратного интеграла с ядрами Коши // Дифференц. уравнения. 1989. Т. 25, № 5. С. 911–915.

4. Пашковский С. Вычислительные применения многочленов и рядов Чебышева. М., 1983.

5. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции : в 3 т. М., 1966. Т. 2.

6. Шешко М. А. Сингулярные интегральные уравнения с ядром Коши и Гильберта и их приближенное решение. Люблин, 2003.

Поступила в редакцию 25.03.2013.

Галина Алексеевна Расолько – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры веб-технологий и компьютерного моделирования.