УДК 517.988

А. Н. ТАНЫГИНА

СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ УСЛОВИЙ СХОДИМОСТИ МЕТОДА НЬЮТОНА – КАНТОРОВИЧА ДЛЯ ПРИБЛИЖЕННОГО РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАТОРНЫХ УРАВНЕНИЙ

Проведен сравнительный анализ двух различных условий гладкости для приближенного решения методом Ньютона – Канторовича нелинейных операторных уравнений вида $f(x)=0$ в банаховых пространствах: обобщенного условия Гёльдера и условия регулярной гладкости, предложенного А. Гальпериным и З. Ваксманом. Установлено, что улучшение оценок скорости сходимости последовательных приближений по методу Ньютона – Канторовича к точному решению уравнения $f(x)=0$ при предположении регулярной гладкости оператора *f* имеет место за счет того факта, что данное условие является более жестким требованием гладкости по сравнению с обобщенным условием Гёльдера. Это, в свою очередь, удалось заметить благодаря замене условия регулярной гладкости более простой его модификацией, в записи которой приращения производной оператора *f* мажорируются приращениями скалярной функции. Приведены расчетные значения оценок скорости сходимости для нелинейного скалярного уравнения с функцией $f(x)=\left(1+\sqrt{1,6}\right)^{-1}\left(x+\frac{2}{3}x\sqrt{x}-3\right)$.

Ключевые слова: метод Ньютона – Канторовича; условие Гёльдера; регулярная гладкость; оценки скорости сходимости; нелинейные операторные уравнения.

The article is devoted to the comparative analysis of two different conditions that enable the Newton – Kantorovich successive approximation technique for solving nonlinear operator equations of the form $f(x)=0$ in Banach spaces. These conditions are the Hölder continuity on the one hand and the regular smoothness proposed by A. Galperin and Z. Waksman on the other hand. It is shown that the regular smoothness condition provides faster convergence to the solution of the equation because of this condition is more restrictive than the Hölder continuity condition. This result is based on the fact that the regular smoothness condition may be replaced by a simpler one in which increments of the derivative of the operator *f* are majorized by increments of a scalar function. The calculated values of the error estimates for the nonlinear scalar equation with the function $f(x)=\left(1+\sqrt{1,6}\right)^{-1}\left(x+\frac{2}{3}x\sqrt{x}-3\right)$ are obtained.

Key words: Newton – Kantorovich method; Hölder continuity condition; regular smoothness; error estimates; nonlinear operator equations.

В статье представлен сравнительный анализ обобщенного условия Гёльдера и условия регулярной гладкости, предложенного в работах А. Гальперина и З. Ваксмана [1, 2], для приближенного решения методом Ньютона – Канторовича операторных уравнений вида

$$f(x)=0, \tag{1}$$

где $f: X \to Y$ – нелинейный оператор, дифференцируемый в каждой внутренней точке замкнутого шара $B\left(x_0,R\right)\subset X$; X, Y – банаховы пространства; x_0 – известное начальное приближение. Последовательные приближения по методу Ньютона – Канторовича задаются равенствами

$$x_{n+1}=x_n-[f'(x_n)]^{-1}f(x_n) \qquad (n=0,1,\ldots). \tag{2}$$

Обобщенным условием Гёльдера для оператора *f* называется условие вида

$$\left\|f'\left(x''\right)-f'\left(x'\right)\right\|\le\omega\left(\left\|x''-x'\right\|\right), \qquad \forall x',x''\in\overline{B\left(x_0,R\right)}, \tag{3}$$

где ω – возрастающая положительная функция, для которой $\lim\limits_{t\to 0}\omega(t)=0.$ В частности, при $\omega(t)=ct$ $(c>0)$ условие (3) является условием Липшица, при $\omega(t)=ct^p$ $(c>0,\ 0<p<1)$ – классическим условием Гёльдера.

В работе [3] была доказана теорема о сходимости метода (2) к точному решению уравнения (1) при условии (3). Для этого наряду с функцией ω была рассмотрена функция

$$\tilde{\omega}(r)=\sup\{\omega(u)+\omega(v): u+v=r\} \qquad (0\le r\le R) \tag{4}$$

и введены функции

$$\Psi(r)=a+b\int_0^r\omega(t)dt-r \qquad (0\le r\le R);$$

$$\widetilde{\Psi}(r)=a+b\int_0^r\tilde{\omega}(t)dt-r \qquad (0\le r\le R),$$

где константы a и b определены при помощи формул

$$a = \left\| \left[f'(x_0) \right]^{-1} f(x_0) \right\|, \qquad b = \left\| \left[f'(x_0) \right]^{-1} \right\|.$$

Теорема о сходимости имеет следующий вид.

Теорема 1 [3]. *Пусть уравнение* $\widetilde{\Psi}(r) = 0$ *имеет единственный корень* ρ_* *на отрезке* $[0, R]$. *Тогда уравнение* (1) *имеет решение* x_* *в шаре* $\overline{B(x_0, \rho_*)}$ *и приближения* (2) *определены для всех* n, *принадлежат шару* $\overline{B(x_0, \rho_*)}$, *причем справедливы оценки*

$$\| x_{n+1} - x_n \| \le \rho_{n+1} - \rho_n \qquad (n = 0, 1, \ldots) \tag{5}$$

и

$$\| x_* - x_n \| \le \rho_* - \rho_n \qquad (n = 0, 1, \ldots), \tag{6}$$

где последовательность $\{\rho_n\}$, *определенная при помощи рекуррентной формулы*

$$\rho_{n+1} = \rho_n - \frac{\widetilde{\Psi}(\rho_n)}{\Psi'(\rho_n)} \qquad (n = 0, 1, \ldots; \; \rho_0 = 0),$$

монотонно возрастает и сходится к ρ_*.

В работах [1, 2] отмечено, что условие (3) представляет собой слишком «грубый» инструмент для анализа сходимости метода (2), в связи с чем введено новое понятие гладкости оператора f, названное *регулярной гладкостью*. Использование такого ограничения на оператор f позволило получить более точные оценки скорости сходимости метода (2) к решению уравнения (1) по сравнению с известными ранее. Однако смысл данного условия является достаточно сложным и в ходе рассуждений в указанных работах на самом деле используется другое, вытекающее из него условие. Выпишем это условие в явном виде и приведем формулировку основной теоремы о сходимости метода (2), доказанной в [4].

Пусть $\omega : [0, \infty) \to [0, \infty)$ – непрерывная строго возрастающая вогнутая функция, причем $\omega(0) = 0$. Без ограничения общности будем считать, что $f'(x_0) = I$. Обозначим

$$h(f) = \inf \left\{ \| f'(x) \| : \, x \in \overline{B(x_0, R)} \right\}.$$

Согласно [2] оператор f называется ω-*регулярно гладким* на $\overline{B(x_0, R)}$ (или ω является *модулем регулярной гладкости* для оператора f на $\overline{B(x_0, R)}$), если существует число $h \in [0, h(f)]$ такое, что для любых $x', \; x'' \in B(x_0, R)$ имеет место неравенство

$$\omega^{-1}\left(h_f(x', x'') + \| f'(x'') - f'(x') \| \right) - \omega^{-1}\left(h_f(x', x'') \right) \le \| x'' - x' \|, \tag{7}$$

где

$$h_f(x', x'') = \min\left\{ \| f'(x') \|, \| f'(x'') \| \right\} - h.$$

Оператор f называется *регулярно гладким* на $\overline{B(x_0, R)}$, если он является ω-регулярно гладким на $B(x_0, R)$ для некоторого ω с указанными выше свойствами.

Условие (7) можно переписать в виде

$$\| f'(x'') - f'(x') \| \le \omega\left(\xi(x', x'') + \| x'' - x' \| \right) - \omega\left(\xi(x', x'') \right), \tag{8}$$

где

$$\xi(x', x'') = \omega^{-1}\left(h_f(x', x'') \right) = \omega^{-1}\left(\min\left\{ \| f'(x') \|, \| f'(x'') \| \right\} - h \right).$$

Отметим, что в [1] в определении ω-регулярной гладкости число h нигде не фигурирует, а формулировка определения совпадает с формулировкой из [2] при $h = 0$. Такое определение в [1] является более жестким, поскольку если для некоторого $h = h_0$ и некоторых $x', x'' \in B(x_0, R)$ неравенство (8) выполнено, то и для всякого $h > h_0$ с теми же $x', x'' \in \overline{B(x_0, R)}$ это неравенство будет выполнено в силу того, что разность $\omega(t + \tau) - \omega(t)$ не возрастает по t для каждого фиксированного $\tau > 0$. Действительно, при увеличении h значение h_f уменьшается. Следовательно, $\xi = \omega^{-1}(h_f)$ уменьшается (в силу свойств функции ω функция $\omega^{-1} : [0, \infty) \to [0, \infty)$ является непрерывной, строго возрастающей и выпуклой на $[0, \infty)$), что приводит к увеличению правой части неравенства (8).

Лемма [2]. *Если оператор f является* ω*-регулярно гладким на* $\overline{B(x_0,R)}$ *с некоторым h, то для любых* $x',\ x''\in\overline{B(x_0,R)}$ *имеет место неравенство*

$$\left|\omega^{-1}\left(\left\|f'(x'')\right\|-h\right)-\omega^{-1}\left(\left\|f'(x')\right\|-h\right)\right|\le\left\|x''-x'\right\|.$$

Непосредственно из определения функции ξ и леммы следует неравенство

$$\xi(x',x'')\ge\omega^{-1}\left(\left\|f'(x')\right\|-h\right)-\left\|x''-x'\right\|$$

для любых $x',\ x''\in\overline{B(x_0,R)}$. Далее, в силу леммы

$$\omega^{-1}\left(\left\|f'(x')\right\|-h\right)\ge\omega^{-1}\left(\left\|f'(x_0)\right\|-h\right)-\left\|x'-x_0\right\|=\chi-\left\|x'-x_0\right\|,$$

где $\chi=\omega^{-1}(1-h)$, откуда

$$\xi(x',x'')\ge\chi-\left\|x'-x_0\right\|-\left\|x''-x'\right\|=\chi-r-\left\|x''-x'\right\|,$$

где $r=\left\|x'-x_0\right\|$. С другой стороны, по определению $\xi(x',x'')\ge 0$, откуда

$$\xi(x',x'')\ge\left(\chi-r-\left\|x''-x'\right\|\right)^{+},\tag{9}$$

где $\lambda^{+}=\max\{\lambda,0\}$.

В силу неравенства (9) и вогнутости функции ω имеем

$$\left\|f'(x'')-f'(x')\right\|\le\omega\left(\xi(x',x'')+\left\|x''-x'\right\|\right)-\omega\left(\xi(x',x'')\right)\le\omega\left(\left(\chi-r-\left\|x''-x'\right\|\right)^{+}+\left\|x''-x'\right\|\right)-\omega\left(\left(\chi-r-\left\|x''-x'\right\|\right)^{+}\right).$$

Условие

$$\left\|f'(x'')-f'(x')\right\|\le\omega\left(\left(\chi-r-\left\|x''-x'\right\|\right)^{+}+\left\|x''-x'\right\|\right)-\omega\left(\left(\chi-r-\left\|x''-x'\right\|\right)^{+}\right),\tag{10}$$

в записи которого приращение производной оператора *f* мажорируется приращением скалярной функции, является более наглядным, чем первоначальное условие гладкости оператора *f*, предложенное в работах А. Гальперина и З. Ваксмана. Более того, в работе [2] используется именно это условие при доказательстве некоторых вспомогательных утверждений и основной теоремы о сходимости метода (2).

Условие (10) совпадает в случае $\left(\chi-r-\left\|x''-x'\right\|\right)^{+}=0$ с условием (3). При увеличении χ величина $\left(\chi-r-\left\|x''-x'\right\|\right)^{+}$ увеличивается и, следовательно, правая часть неравенства (10) уменьшается. Поэтому чем больше χ, тем лучше оценка для $\left\|f'(x'')-f'(x')\right\|$, что дает возможность получить более точные оценки и для последовательных приближений.

Пусть $\Omega(t)=\int\limits_0^t\omega(\tau)d\tau$, $a=\left\|f(x_0)\right\|$, $\chi\in\left[0,\omega^{-1}(1)\right]$ – некоторая постоянная. Обозначим через Φ функцию числового аргумента *t*:

$$\Phi(t)=a-\Omega(\chi)+\Omega(\chi-t)-t\left(1-\omega(\chi)\right).\tag{11}$$

Областью определения функции (11) является отрезок $[0,\chi]$, т. е. $\Phi:[0,\chi]\to\mathbb{R}$. Поскольку $\omega(\chi)\le 1$, то $\Phi'(t)=-\omega(\chi-t)-(1-\omega(\chi))\le 0$ на $[0,\chi]$ и функция (11) убывает на $[0,\chi]$ от *a* до $a-\Omega(\chi)-\chi\left(1-\omega(\chi)\right)$.

Определим числовую последовательность $\{t_n\}$ следующим рекуррентным соотношением:

$$t_{n+1}=t_n+\frac{a-\Omega(\chi)+\Omega(\chi-t_n)-t_n\left(1-\omega(\chi)\right)}{1-\left[\omega(\chi)-\omega(\chi-t_n)\right]},\tag{12}$$

$n=0,1,\ldots;\ t_0=0.$

Теорема 2 [4]. *Пусть существует постоянная* $\chi\in\left[0,\omega^{-1}(1)\right]$ *такая, что выполнено неравенство*

$$a\le\Omega(\chi)-\chi\omega(\chi)+\chi,\tag{13}$$

оператор f удовлетворяет на $\overline{B(x_0,R)}$ *условию* (10) *с таким* χ *и функция* (11) *имеет единственный нуль* $t_*\le R$ *на отрезке* $[0,\chi]$. *Тогда:*

1) *уравнение* (1) *имеет единственное решение* x_* *в шаре* $\overline{B(x_0,t_*)}$;

2) *последовательные приближения* (2) *определены для всех* $n=0,1,\ldots,$ *принадлежат шару* $\overline{B(x_0,t_*)}$ *и сходятся к* x_*;

3) *для всех* $n = 0, 1, \ldots$ *справедливы оценки*

$$\|x_{n+1} - x_n\| \le t_{n+1} - t_n; \tag{14}$$

$$\|x_* - x_n\| \le t_* - t_n, \tag{15}$$

где последовательность $\{t_n\}$ *определена по правилу* (12), *монотонно возрастает и сходится к* t_*.

Основным результатом работы является следующая теорема.

Теорема 3. *Оценки* (14) *и* (15) *скорости сходимости метода* (2) *к решению уравнения* (1) *в случае выполнения для оператора f условия регулярной гладкости* (10) *являются более точными, чем оценки* (5) *и* (6) *скорости сходимости, получаемые в случае выполнения для оператора f обобщенного условия Гёльдера* (3). *Причиной этого служит тот факт, что условие* (10) *является более жестким требованием гладкости, чем условие* (3).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Будем считать, что $f'(x_0) = I$. Пусть $\omega : [0, \infty) \to [0, \infty)$ – непрерывная строго возрастающая вогнутая функция, $\omega(0) = 0$. Очевидно, что в силу вогнутости ω каждый ω-регулярно гладкий оператор удовлетворяет обобщенному условию Гёльдера с тем же ω. Кроме того, для вогнутой функции справедливо неравенство

$$\frac{1}{2}\omega(\lambda_1) + \frac{1}{2}\omega(\lambda_2) \le \omega\left(\frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2}\right), \qquad \lambda_1, \lambda_2 \in [0, \infty).$$

Положим $\lambda_1 = x - y$, $\lambda_2 = y$, где $x - y, y \in [0, \infty)$. Тогда

$$\omega(x - y) + \omega(y) \le 2\omega\left(\frac{x}{2}\right),$$

откуда функция $\tilde{\omega}$, определяемая формулой (4), имеет вид $\tilde{\omega}(r) = 2\omega\left(\frac{r}{2}\right)$.

Предположим, что для оператора *f* выполнены все условия теоремы 2. Оценим величину $\|x_{n+1} - x_n\|$ при $n = 0, 1, \ldots$. Для $n = 0$ имеем

$$\|x_1 - x_0\| = \left\|\left[f'(x_0)\right]^{-1} f(x_0)\right\| = a = \rho_1 - \rho_0 = t_1 - t_0.$$

Для $n \ge 1$

$$\|x_{n+1} - x_n\| = \left\|x_n - \left[f'(x_n)\right]^{-1} f(x_n) - x_n\right\| = \left\|\left[f'(x_n)\right]^{-1} f(x_n)\right\| =$$

$$= \left\|\left[f'(x_n)\right]^{-1}\left(f(x_n) - f(x_{n-1}) - f'(x_{n-1})(x_n - x_{n-1})\right)\right\| \le \left\|\left[f'(x_n)\right]^{-1}\right\| r_n,$$

где

$$r_n = \left\|f(x_n) - f(x_{n-1}) - f'(x_{n-1})(x_n - x_{n-1})\right\|.$$

Найдем по отдельности оценки величин $\left\|\left[f'(x_n)\right]^{-1}\right\|$ и r_n при разных условиях гладкости оператора *f*. Рассмотрим оператор

$$T = I + \left[f'(x_0)\right]^{-1}\left(f'(x_n) - f'(x_0)\right),$$

обратимость которого была установлена в работе [4]. Поскольку $f'(x_n) = f'(x_0)T = T$, то

$$\left\|\left[f'(x_n)\right]^{-1}\right\| = \|T^{-1}\| \le \frac{1}{1 - \|T - I\|},$$

где $\|T - I\| = \|f'(x_n) - f'(x_0)\|$.

Согласно условию (3)

$$\|f'(x_n) - f'(x_0)\| \le \omega\left(\|x_n - x_0\|\right),$$

откуда

$$\left\|\left[f'(x_n)\right]^{-1}\right\| \le \frac{1}{1 - \omega\left(\|x_n - x_0\|\right)}. \tag{16}$$

С другой стороны, согласно условию (10)

$$\|f'(x_n) - f'(x_0)\| \le \omega\left(\left(\chi - \|x_n - x_0\|\right)^+ + \|x_n - x_0\|\right) - \omega\left(\left(\chi - \|x_n - x_0\|\right)^+\right),$$

откуда

$$\left\|\left[f'\left(x_n\right)\right]^{-1}\right\| \le \frac{1}{1-\left[\omega\left(\left(\chi-\left\|x_n-x_0\right\|\right)^{+}+\left\|x_n-x_0\right\|\right)-\omega\left(\left(\chi-\left\|x_n-x_0\right\|\right)^{+}\right)\right]}. \quad (17)$$

В силу справедливости для последовательности $\{x_n\}$ неравенства (14) для любого $n=0,1,\dots$ имеет место оценка

$$\left\|x_n-x_0\right\| \le \sum_{j=1}^{n}\left\|x_j-x_{j-1}\right\| \le \sum_{j=1}^{n}\left(t_j-t_{j-1}\right)=t_n$$

и, следовательно, с учетом неравенства $t_n<\chi$, справедливого для любого $n=0,1,\dots$ [4], имеют место соотношения

$$\chi-\left\|x_n-x_0\right\| \ge \chi-t_n>0,$$

т. е. для любого $n=0,1,\dots$ величина $\chi-\left\|x_n-x_0\right\|$ является положительной. Отсюда в силу свойств функции ω

$$\omega\left(\chi-\left\|x_n-x_0\right\|+\left\|x_n-x_0\right\|\right)-\omega\left(\chi-\left\|x_n-x_0\right\|\right) \le \omega\left(\left\|x_n-x_0\right\|\right)-\omega(0)=\omega\left(\left\|x_n-x_0\right\|\right)$$

и оценка (17) величины $\left\|\left[f'\left(x_n\right)\right]^{-1}\right\|$ оказывается точнее, чем оценка (16).

Перейдем к оценке величины r_n. Пусть $x_t=x_{n-1}+t\left(x_n-x_{n-1}\right)$, $0\le t\le 1$. Тогда

$$r_n \le \int_0^1\left\|f'\left(x_t\right)-f'\left(x_{n-1}\right)\right\|\left\|x_n-x_{n-1}\right\|dt.$$

Согласно условию (3)

$$\left\|f'\left(x_t\right)-f'\left(x_{n-1}\right)\right\| \le \omega\left(\left\|x_t-x_{n-1}\right\|\right). \quad (18)$$

С другой стороны, согласно условию (10)

$$\begin{aligned}\left\|f'\left(x_t\right)-f'\left(x_{n-1}\right)\right\| \le\ & \omega\left(\left(\chi-\left\|x_{n-1}-x_0\right\|-\left\|x_t-x_{n-1}\right\|\right)^{+}+\left\|x_t-x_{n-1}\right\|\right)- \\ & -\omega\left(\left(\chi-\left\|x_{n-1}-x_0\right\|-\left\|x_t-x_{n-1}\right\|\right)^{+}\right). \quad (19)\end{aligned}$$

Учитывая справедливость для любого $n=0,1,\dots$ неравенства (14), получим

$$\left\|x_{n-1}-x_0\right\| \le t_{n-1};$$
$$\left\|x_t-x_{n-1}\right\|=t\left\|x_n-x_{n-1}\right\| \le t\left(t_n-t_{n-1}\right),$$

откуда

$$\chi-\left\|x_{n-1}-x_0\right\|-\left\|x_t-x_{n-1}\right\| \ge \chi-t_{n-1}-t\left(t_n-t_{n-1}\right)>0.$$

Следовательно, в силу свойств функции ω

$$\begin{aligned}&\omega\left(\chi-\left\|x_{n-1}-x_0\right\|-\left\|x_t-x_{n-1}\right\|+\left\|x_t-x_{n-1}\right\|\right)-\omega\left(\chi-\left\|x_{n-1}-x_0\right\|-\left\|x_t-x_{n-1}\right\|\right) \le \\ &\le \omega\left(\left\|x_t-x_{n-1}\right\|\right)-\omega(0)=\omega\left(\left\|x_t-x_{n-1}\right\|\right)\end{aligned}$$

и оценка (19) оказывается точнее оценки (18) (а значит, и оценка для r_n будет точнее).

В целом при выполнении для оператора f условия (10) оценка для $\left\|x_{n+1}-x_n\right\|$ оказывается точнее, чем в случае выполнения для оператора f условия (3).

Таким образом, улучшение оценок скорости сходимости метода (2) в работах [1, 2] получается за счет того факта, что в силу выбора постоянной χ, удовлетворяющей неравенству (13), и свойств последовательности $\{t_n\}$ величина $\chi-r-\left\|x''-x'\right\|$ в условии (10) оказывается положительной. В случае, когда $\chi-r-\left\|x''-x'\right\|\le 0$, условие (10) превращается в условие гладкости (3) и улучшения оценок скорости сходимости не происходит. С другой стороны, в силу свойств функции ω при $\chi-r-\left\|x''-x'\right\|>0$ условие (10) является более жестким требованием гладкости оператора f, чем условие (3). Поэтому вполне естественно, что оценки скорости сходимости метода (2), полученные в работах [1, 2], оказываются более точными, чем оценки скорости сходимости, получаемые в случае выполнения для оператора f обобщенного условия Гёльдера. Теорема 3 доказана.

Приведем в качестве примера сравнение оценок скорости сходимости метода (2) для скалярного уравнения (1) с функцией

$$f(x) = \left(1 + \sqrt{1{,}6}\right)^{-1}\left(x + \frac{2}{3}x\sqrt{x} - 3\right)$$

на отрезке $[1{,}2;\, 2]$. Для расчетов будем использовать систему компьютерной математики *Mathematica*. Выберем в качестве начального приближения $x_0 = 1{,}6$, в качестве ω – функцию $\omega(t) = \sqrt{2t}$. Тогда

$$f'(x) = \left(1 + \sqrt{1{,}6}\right)^{-1}\left(1 + \sqrt{x}\right), \quad f'(x_0) = 1, \quad a = \left|f(x_0)\right| \approx 0{,}022\,412\,2, \quad b = 1;$$

$$\omega^{-1}(t) = \frac{t^2}{2}, \quad \omega^{-1}(1) = \frac{1}{2}, \quad \Omega(t) = \frac{2\sqrt{2}}{3}t^{3/2}, \quad \tilde{\omega}(r) = 2\omega\left(\frac{r}{2}\right) = 2\sqrt{r} \quad (0 \le r \le 0{,}4);$$

$$\Psi(r) = a + \frac{2\sqrt{2}}{3}r^{3/2} - r, \quad \widetilde{\Psi}(r) = a + \frac{4}{3}r^{3/2} - r \quad (0 \le r \le 0{,}4).$$

Неравенство (13) выполняется для всех $\chi \in [0{,}024\,185\,2;\, 0{,}5]$ (левая граница взята приближенно), и функция *f* удовлетворяет модифицированному условию регулярной гладкости (10) с каждым таким χ, а следовательно, и обобщенному условию Гёльдера (3) с $\omega(t) = \sqrt{2t}$.

Проверяя выполнение всех условий теорем 1 и 2, найдем оценки $\alpha_n = \rho_{n+1} - \rho_n$, $\beta_n = t_{n+1} - t_n$, $\gamma_n = \rho_* - \rho_n$ и $\delta_n = t_* - t_n$ для $n = 0, 1, 2, 3$ при различных значениях параметра χ, приведенных в таблице.

Оценки скорости сходимости

		$\chi = 0{,}5$		
	α_n	β_n	γ_n	δ_n
$n = 0$	0,022 412 2	0,022 412 2	0,028 995 2	0,022 671 1
$n = 1$	0,005 675 21	0,000 258 931	0,006 583 07	0,000 258 966
$n = 2$	0,000 787 836	$3{,}510\,83 \cdot 10^{-8}$	0,000 907 855	$3{,}510\,83 \cdot 10^{-8}$
$n = 3$	0,000 104 238	$6{,}834\,81 \cdot 10^{-16}$	0,000 120 019	$7{,}147\,06 \cdot 10^{-16}$
		$\chi = 0{,}3$		
	α_n	β_n	γ_n	δ_n
$n = 0$	0,022 412 2	0,022 412 2	0,028 995 2	0,022 750 6
$n = 1$	0,005 675 21	0,000 338 371	0,006 583 07	0,000 338 451
$n = 2$	0,000 787 836	$7{,}922\,02 \cdot 10^{-8}$	0,000 907 855	$7{,}922\,02 \cdot 10^{-8}$
$n = 3$	0,000 104 238	$4{,}340\,28 \cdot 10^{-15}$	0,000 120 019	$4{,}329\,87 \cdot 10^{-15}$
		$\chi = 0{,}1$		
	α_n	β_n	γ_n	δ_n
$n = 0$	0,022 412 2	0,022 412 2	0,028 995 2	0,023 030 1
$n = 1$	0,005 675 21	0,000 617 467	0,006 583 07	0,000 617 98
$n = 2$	0,000 787 836	$5{,}127\,04 \cdot 10^{-7}$	0,000 907 855	$5{,}127\,05 \cdot 10^{-7}$
$n = 3$	0,000 104 238	$3{,}544\,32 \cdot 10^{-13}$	0,000 120 019	$3{,}544\,32 \cdot 10^{-13}$
		$\chi = 0{,}05$		
	α_n	β_n	γ_n	δ_n
$n = 0$	0,022 412 2	0,022 412 2	0,028 995 2	0,023 357 5
$n = 1$	0,005 675 21	0,000 943 307	0,006 583 07	0,000 945 39
$n = 2$	0,000 787 836	$2{,}082\,88 \cdot 10^{-6}$	0,000 907 855	$2{,}082\,89 \cdot 10^{-6}$
$n = 3$	0,000 104 238	$1{,}027\,42 \cdot 10^{-11}$	0,000 120 019	$1{,}027\,42 \cdot 10^{-11}$
		$\chi = 0{,}03$		
	α_n	β_n	γ_n	δ_n
$n = 0$	0,022 412 2	0,022 412 2	0,028 995 2	0,023 803 7
$n = 1$	0,005 675 21	0,001 382 33	0,006 583 07	0,001 391 57
$n = 2$	0,000 787 836	$9{,}243\,24 \cdot 10^{-6}$	0,000 907 855	$9{,}243\,69 \cdot 10^{-6}$
$n = 3$	0,000 104 238	$4{,}427\,09 \cdot 10^{-10}$	0,000 120 019	$4{,}427\,09 \cdot 10^{-10}$

Как показывает таблица, оценки β_n и δ_n точнее оценок α_n и γ_n соответственно $(n = 0, 1, 2, 3)$ при всех рассмотренных значениях параметра χ. С уменьшением χ оценки β_n и δ_n становятся хуже, что является естественным, поскольку наибольшему значению $\chi = 0{,}5$ соответствует наиболее жесткое ограничение на функцию *f*.

Работа выполнена при поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований (проект Ф13М-036).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Galperin A., Waksman Z. Newton's method under a weak smoothness assumption // J. Comp. Appl. Math. 1991. Vol. 35. P. 207–215.
2. Galperin A., Waksman Z. Regular smoothness and Newton's method // Numer. Funct. Anal. and Optimiz. 1994. Vol. 15, № 7/8. P. 813–858.
3. Лысенко Ю. В. Новые условия сходимости метода Ньютона – Канторовича и некоторые их приложения : дис. … канд. физ.-мат. наук : 01.01.01. Минск, 1993.
4. Забрейко П. П., Таныгина А. Н. Модификация условия Гальперина – Ваксмана для решения нелинейных операторных уравнений методом Ньютона – Канторовича // Докл. НАН Беларуси. 2013. Т. 57, № 6. С. 8–12.

Поступила в редакцию 18.12.2013.

Анастасия Николаевна Таныгина – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры теории функций.