УДК 512.55

В. М. ШИРЯЕВ

ПЕРИОДИЧЕСКИЕ $\mathcal{E}$-ЦЕНТРАЛЬНЫЕ *m*-КОЛЬЦА

В данной работе обобщается на *m*-кольца теорема о разложении (ассоциативного) кольца с единицей и коммутирующими идемпотентами в подпрямое произведение *A*-колец (имеющих только два идемпотента – единицуи нуль) [11, предложение 2]. В теории *m*-колец имеется аналог этого понятия – $\mathcal{E}$-примарные *m*-кольца – это такие *m*-кольца, у которых *о*-почтикольцо имеет в точности два идемпотента – нулевой и единичный элементы. *m*-Кольцо (K, +, ·, ○) называется периодическим, если *о*-полугруппа (K, ○) периодична, т. е. всякая ее подполугруппа, порожденная одним элементом, конечна; и *m*-кольцо называется $\mathcal{E}$-центральным, если любой его идемпотент перестановочен с любым элементом этого *m*-кольца. Класс $\mathcal{E}$-центральных включает в себя все ниль-*m*-кольца, все $\mathcal{E}$-примарные и все *m*-кольца с делением.

Основная теорема утверждает, что каждое $\mathcal{E}$-центральное периодическое *m*-кольцо K является либо ниль-*m*-кольцом, либо разлагается в подпрямое произведение некоторого семейства $\mathcal{E}$-примарных периодических *m*-колец, либо является расширением ниль-*m*-кольца при помощи подпрямого произведения некоторого семейства $\mathcal{E}$-примарных периодических *m*-колец. При этом если K имеет единицу и конечное число идемпотентов, то K разлагается в прямую сумму конечного числа идеалов, являющихся $\mathcal{E}$-примарными периодическими *m*-кольцами. Что касается $\mathcal{E}$-примарных *m*-колец, то получена теорема о том, что всякое $\mathcal{E}$-примарное периодическое *m*-кольцо есть расширение ниль-*m*-кольца при помощи периодического *m*-кольца с делением. Примеры показывают, то условие периодичности и условие $\mathcal{E}$-центральности в основной теореме нельзя ослабить.

Ключевые слова: *m*-кольцо; периодическое *m*-кольцо; $\mathcal{E}$-центральное *m*-кольцо; $\mathcal{E}$-примарное *m*-кольцо; ниль-*m*-кольцо; подпрямое произведение *m*-колец.

In this article the theorem about a decomposition of a associative ring with identity and commuting idempotents in a subdirect product of *A*-rings (possessing exactly two idempotents – the null and the identity) is generalized to *m*-rings. In the theory of *m*-rings the notion of *A*-ring corresponds the notion of $\mathcal{E}$-primary *m*-ring.The article deals with periodic $\mathcal{E}$-centra *m*-rings, i. e. such *m*-rings (K, +, ·, ○), in which every monogenic subsemigroup of the semigroup (K, ○) is finite and all idempotents are central. The class of all periodic $\mathcal{E}$-central *m*-rings contains all nil-*m*-rings and all $\mathcal{E}$-primary periodic *m*-rings.

The main theorem confirms, that any periodic $\mathcal{E}$-central *m*-ring K is either a nil-*m*-ring or an extention of a nil-*m*-ring by a subdirect product of $\mathcal{E}$-primary periodic *m*-rings. With the set of idempotents of K to be finite, the *m*-ring K is a direct sum of finite number of ideals, every of that is a $\mathcal{E}$-primary periodic *m*-ring. In turn every $\mathcal{E}$-primary periodic *m*-ring is an extention of a nil-*m*-ring by a division periodic ring. It is shown using the examples, that the condition of periodicity and the condition of $\mathcal{E}$-centrality in the main theorem can not weakened.

Key words: *m*-ring; periodic *m*-ring; $\mathcal{E}$-central *m*-ring; $\mathcal{E}$-primary *m*-ring; nil-*m*-ring; subdirect product of *m*-rings.

Используется терминология и обозначения, введенные в [1]–[3], а также принятые в теории полугрупп и групп [4], [5], колец и полей [6], [7], почтиколец [8], универсальных алгебр [9], решеток [10]. Универсальная алгебра (K, +, ·, ○) называется *m*-кольцом, если алгебра (K, +, ·) является ассоциативным коммутативным кольцом с операциями сложения «+» и умножения «·» (редукт *m*-кольца K), алгебра (K, ○) – полугруппой с операцией суперпозиции «○» (*о*-полугруппа *m*-кольца K), которая дистрибутивна справа относительно кольцевых операций сложения и умножения. Тогда универсальная алгебра (K, +, ○) является правым почтикольцом [8] (называемым *о*-почтикольцом *m*-кольца K). Если 0 является нулем полугруппы (K, ∘), то $\mathcal{m}$-кольцо K называется нуль-симметричным. Здесь мы рассматриваем только нуль-симметричные $\mathcal{m}$-кольца.

В данной работе обобщается на $\mathcal{m}$-кольца теорема о разложении (ассоциативного) кольца с единицей и коммутирующими идемпотентами в подпрямое произведение A-колец (имеющих только два идемпотента $\mathcal{E}$ – единицу и нуль) [11, предложение 2]. В теории $\mathcal{m}$-колец имеется аналог этого понятия – $\mathcal{E}$-примарные $\mathcal{m}$-кольца – это такие $\mathcal{m}$-кольца, у которых o-почтикольцо имеет в точности два идемпотента – нулевой и единичный элементы. $\mathcal{m}$-Кольцо (K, +, ·, ∘) называется периодическим, если o-полугруппа (K, ∘) периодична, т. е. всякая ее подполугруппа, порожденная одним элементом, конечна; и $\mathcal{m}$-кольцо называется $\mathcal{E}$-центральным, если любой его идемпотент перестановочен с любым элементом этого $\mathcal{m}$-кольца. Класс $\mathcal{E}$-центральных включает в себя все ниль-$\mathcal{m}$-кольца, все $\mathcal{E}$-примарные и все $\mathcal{m}$-кольца с делением.

Показано, что каждое $\mathcal{E}$-центральное периодическое $\mathcal{m}$-кольцо K является либо ниль-$\mathcal{m}$-кольцом, либо разлагается в подпрямое произведение некоторого семейства $\mathcal{E}$-примарных периодических $\mathcal{m}$-колец, либо является расширением ниль-$\mathcal{m}$-кольца при помощи подпрямого произведения некоторого семейства $\mathcal{E}$-примарных периодических $\mathcal{m}$-колец. При этом если K имеет единицу и конечное число идемпотентов, то K разлагается в прямую сумму конечного числа идеалов, являющихся $\mathcal{E}$-примарными периодическими $\mathcal{m}$-кольцами. Что касается $\mathcal{E}$-примарных $\mathcal{m}$-колец, то получена теорема о том, что всякое $\mathcal{E}$-примарное периодическое $\mathcal{m}$-кольцо есть расширение ниль-$\mathcal{m}$-кольца при помощи периодического $\mathcal{m}$-кольца с делением.

Перед формулировкой теорем приведем некоторые обозначения и определения: $\mathbb{N} = \{1, 2, \ldots\}$ − множество всех натуральных чисел; $\mathbb{N}_2 = \mathbb{N} \setminus \{1\}$; $\mathbb{Z}$ − множество всех целых рациональных чисел. Пусть теперь (K, +, ·, ∘) есть $\mathcal{m}$-кольцо. Из условий правой дистрибутивности суперпозиции относительно кольцевых операций, т. е.

$$\begin{aligned} &\forall\, a, b, c \in \mathrm{K}\ ((a + b) \circ c = a \circ c + b \circ c),\\ &\forall\, a, b, c \in \mathrm{K}\ ((a \cdot b) \circ c = (a \circ c) \cdot (b \circ c)), \end{aligned} \tag{1}$$

следует, что преобразования $\psi_c : x \mapsto x \circ c$ (правые сдвиги o-полугруппы $\mathcal{m}$-кольца K) являются эндоморфизмами кольца (K, +, •). Через $\mathrm{Im}\,\psi_c$ и $\mathrm{Ker}\,\psi_c$ обозначаются соответственно образ и ядро эндоморфизма ψ_c. Для тождественного преобразования применяется обозначение ψ_1. Если $a \in \mathrm{K}$ и $n \in \mathbb{N}$, то элемент $\underbrace{a \circ \ldots \circ a}_{n \text{ раз}}$ обозначается через $a^{[n]}$. Непустое подмножество A $\mathcal{m}$-кольца K, замкнутое относительно сложения, вычитания, умножения и суперпозиции, называется его под-$\mathcal{m}$-кольцом (запись: $A \leq \mathrm{K}$). Идеал A-кольца (K, +, •), стабильный слева (т. е. $\forall x, y \in \mathrm{K}\ \forall a \in A\ (x \circ (y + a) - x \circ y \in A)$) и инвариантный справа (т. е. $A \circ \mathrm{K} \subseteq A$), называется идеалом $\mathcal{m}$-кольца K. В этом случае пишем $A \trianglelefteq \mathrm{K}$. Для $X \subseteq \mathrm{K}$ обозначается через $|X|$ мощность множества X, через $X^{\#}$ – множество $X \setminus \{0\}$, через $< X >$ обозначается под-$\mathcal{m}$-кольцо $\mathcal{m}$-кольца K, порожденное множеством X, а через $< X >_\circ$ − подполугруппа полугруппы (K, ∘), порожденная множеством X. В частности, если $a \in \mathrm{K}$, то вместо $<\{a\}>$ пишем $< a >$ и вместо $<\{a\}>_\circ$ пишем $< a >_\circ$. Для X, $Y \in \mathrm{K}$ определяется (правое) частное от деления подмножества X на подмножество Y как $(X\colon Y) = \{x \in \mathrm{K} \mid x \circ Y \subseteq X\}$. При этом если $a, b \in \mathrm{K}$, то $(\{a\} : \{b\})$ записываем как $(a : b)$. Решетка всех под-$\mathcal{m}$-колец $\mathcal{m}$-кольца K обозначается через Sub K, а решетка всех идеалов – через Esz K. Два под-$\mathcal{m}$-кольца A и B считаются *ортогональными* (обозначение: $A \perp B$), если $A \cap B = \{0\}$. В $\mathcal{m}$-кольце K выделяются следующие подмножества: $N(\mathrm{K}) = \{a \in \mathrm{K} \mid \exists\, n \in \mathbb{N}\ (a^{[n]} = 0)\}$ – множество всех нильпотентных элементов (ниль-элементов) $\mathcal{m}$-кольца K; $\mathcal{E}(\mathrm{K}) = \{a \in \mathrm{K} \mid a = a^{[2]}\}$ – множество всех идемпотентов $\mathcal{m}$-кольца K; $\mathcal{Pe}(\mathrm{K}) = \{a \in \mathrm{K} \mid \exists n, r \in \mathbb{N}\ (a^{[r]} = a^{[n+r]})\}$ – множество всех периодических элементов; $C(\mathrm{K}) = \{x \in \mathrm{K} \mid \forall a \in \mathrm{K}\ (x \circ a = a \circ x)\}$ – множество всех центральных элементов $\mathcal{m}$-кольца K. Если K – $\mathcal{m}$-кольцо с единицей, то через $G(\mathrm{K})$ обозначается группа обратимых элементов полугруппы (K, ∘). Если $a \in G(\mathrm{K})$, то $a^{[-1]}$ означает элемент группы $(G(\mathrm{K}), \circ)$, обратный к a. Если $A \in \mathrm{Esz\,K}$, то фактор-$\mathcal{m}$-кольцо по идеалу A обозначается как K/A, при этом $\nu_A : x \mapsto x + A$ означает естественный гомоморфизм из K на K/A). В этом случае $\mathcal{m}$-кольцо K считается *расширением $\mathcal{m}$-кольца A при помощи $\mathcal{m}$-кольца* K/A. Если при этом существует $B \in \mathrm{Sub\,K}$ такое, что $A \perp B$ и $\mathrm{K} = A + B$, то расширение называется *расщепляемым* и K считается *полупрямым произведением идеала A на под-$\mathcal{m}$-кольцо B* (*$\mathcal{m}$-кольца A* на *$\mathcal{m}$-кольцо B*) (обозначение: $\mathrm{K} = A \leftthreetimes B$). В этих обозначениях $\mathcal{m}$-кольцо K считается *периодическим*, если $\mathcal{Pe}(\mathrm{K}) = \mathrm{K}$; *ниль-$\mathcal{m}$-кольцом*, если $\mathcal{N}(\mathrm{K}) = \mathrm{K}$; *вполне полупростым*, если $\mathcal{N}(\mathrm{K}) = \{0\}$; *$\mathcal{E}$-коммутативным*, если идемпотенты коммутируют, т. е. $\forall i, j \in \mathcal{E}(\mathrm{K})\,(i \circ j = j \circ i)$; *$\mathcal{E}$-центральным*, если $\mathcal{E}(\mathrm{K}) \subseteq C(\mathrm{K})$; *$\mathcal{E}$-примарным*, если имеет единицу и $|\,\mathcal{E}(\mathrm{K})\,| = 2$; *$\mathcal{m}$-кольцом с нулевым умножением*, если $\mathrm{K} \circ \mathrm{K} = \{0\}$;

m-кольцом с делением, если K имеет единицу и $G(\mathrm{K}) = \mathrm{K}^{\#}$.

Теорема 1. *Пусть* K – $\mathcal{E}$*-центральное периодическое m-кольцо с единицей и конечным числом идемпотентов. Тогда* K *разлагается в прямую сумму конечного числа идеалов* $\mathrm{K} \circ i$, $i \in \mathcal{E}(\mathrm{K})$, *которые являются* $\mathcal{E}$*-примарными периодическими m-кольцами.*

Теорема 2. *Пусть* K – $\mathcal{E}$*-примарное периодическое m-кольцо. Тогда* K *есть расширение ниль-кольца* $\mathcal{N}(\mathrm{K})$ *при помощи периодического m-кольца с делением.*

Теорема 3. *Пусть* K – $\mathcal{E}$*-центральное периодическое m-кольцо. Тогда имеются следующие возможности:*

А) K – *это ниль-m-кольцо.*

Б) K *разлагается в подпрямое произведение некоторого семейства* $\mathcal{E}$*-примарных периодических m-колец.*

В) K *является расширением ниль-m-кольца при помощи подпрямого произведения некоторого семейства* $\mathcal{E}$*-примарных периодических m-колец.*

Для доказательства этих утверждений потребуется несколько лемм.

Лемма 1. Пусть K – $\mathcal{E}$-центральное m-кольцо и $i \in \mathcal{E}(\mathrm{K})$. Тогда множество $(0 : i)$ является идеалом m-кольца K, $\mathrm{K} \circ i$ – его под-m-кольцом, и m-кольцо K является полупрямым произведением идеала $(0 : i)$ на под-m-кольцо $\mathrm{K} \circ i$, т. е. $\mathrm{K} = (0 : i) \leftthreetimes (\mathrm{K} \circ i)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $i \in \mathcal{E}(\mathrm{K})$. Так как идемпотент i централен, то для любых $a, b \in \mathrm{K}$ $\psi_i(a \circ b) = a \circ b \circ i = a \circ b \circ i \circ i = a \circ i \circ b \circ i = \psi_i(a) \circ \psi_i(b)$, поэтому ψ_i является не только эндоморфизмом кольца $(\mathrm{K}, +, \bullet)$, но и полугруппы $(\mathrm{K}, \circ)$, а значит, самого m-кольца K. Так что $(0 : i) = \mathrm{Ker}\,\psi_i \in \mathrm{Esz}\,\mathrm{K}$, $\mathrm{Im}\,\psi_i = \mathrm{K} \circ i \in \mathrm{Sub}\,\mathrm{K}$. Далее, если $a \in (0 : i) \cap (\mathrm{K} \circ i)$, то $a = a \circ i = 0$, откуда следует, что $(0 : i) \cap (\mathrm{K} \circ i) = \{0\}$. Теперь для любого $a \in \mathrm{K}$ имеем $a = (a - a \circ i) + a \circ i \in (0 : i) + \mathrm{K} \circ i$. Следовательно, $\mathrm{K} = (0 : i) + \mathrm{K} \circ i$ и $\mathrm{K} = (\mathrm{K} \circ i) \leftthreetimes (0 : i)$. ■

Лемма 2. Пусть K – $\mathcal{E}$-центральное периодическое m-кольцо с единицей. Тогда К разлагается в подпрямое произведение $\mathcal{E}$-примарных периодических m-колец.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как класс всех нуль-симметричных m-колец является многообразием [1], то имеется разложение m-кольца K в подпрямое произведение некоторого семейства $\{\mathrm{K}_\alpha\}_{\alpha \in \Delta}$ подпрямо неразложимых m-колец [9]. Зафиксируем произвольную компоненту K_α. Как гомоморфный образ m-кольца K, компонента K_α должна быть $\mathcal{E}$-центральным периодическим m-кольцом с единицей, которую обозначим через 1. Ради краткости обозначим K_α через P. Предположим, что $i \in \mathcal{E}(\mathrm{K}) \setminus \{0, 1\}$. Ввиду $\mathcal{E}$-центральности P элемент $j = 1 - i$ является также идемпотентом в P, причем ортогональным к i (т. е. $i \circ j = 0$). При этом $i + j = 1$, откуда для произвольного $x \in P$ имеем $x = i \circ x + j \circ x = x \circ i + x \circ j \in P \circ i + P \circ j$. С другой стороны, очевидно, что $(P \circ i) \cap (P \circ j) = \{0\}$, поэтому

$$P = P \circ i \oplus P \circ j \qquad (2)$$

– прямая сумма подгрупп. На самом деле $P \circ i$ и $P \circ j$ являются идеалами m-кольца P, как будет показано ниже. Действительно, то, что, скажем, $P \circ i$ инвариантно справа, очевидно. Далее, пусть $a \in P \circ i$ и $x \in P$. Тогда, как и выше, $x = x \circ i + x \circ j$, откуда $a \bullet x = (a \circ i) \bullet (x \circ i + x \circ j) = (a \circ i) \bullet (x \circ i) + (a \circ i) \bullet (x \circ j) = (a \bullet x) \circ i + (a \circ i) \bullet (x \circ j) \in P \circ i + (a \circ i) \bullet (x \circ j)$. Согласно (2) найдутся элементы $y, z \in P$ такие, что $(a \circ i) \bullet (x \circ j) = y \circ i + z \circ j$. Суперпозиция с i справа дает $0 = (a \circ i \circ i) \bullet (x \circ 0) = (a \circ i \circ i) \bullet (x \circ j \circ i) = ((a \circ i) \bullet (x \circ j)) \circ i = y \circ i \circ i + z \circ j \circ i = y \circ i$. Аналогично, $z \circ j = 0$. Значит, $(a \circ i) \bullet (x \circ j) = 0$ и $(P \circ i) \bullet P \subseteq P \circ i$. Теперь предположим, что $x, y \in P$ и снова пусть $a \in P \circ i$. Тогда

$$x \circ (y + a) - x \circ y = (x \circ i + x \circ j) \circ (y \circ i + y \circ j + a) - (x \circ i + x \circ j) \circ (y \circ i + y \circ j) = x \circ i \circ (y \circ i + y \circ j + a) + (- x \circ i \circ (y \circ i + y \circ j) + x \circ j \circ (y \circ i + y \circ j + a) - x \circ j \circ (y \circ i + y \circ j) \in P \circ i + x \circ j \circ (y \circ i + y \circ j + a)) + (-x \circ j \circ (y \circ i + y \circ j)).$$

Однако с использованием $\mathcal{E}$-центральности P выводим $x \circ j \circ (y \circ i + y \circ j + a) = x \circ j \circ (y \circ i + y \circ j + a) \circ j = x \circ j \circ (y \circ i \circ j + y \circ j \circ j + a \circ j) = x \circ j \circ (y \circ i \circ j + y \circ j \circ j) = x \circ j \circ (y \circ i + y \circ j)$. Значит, $x \circ j \circ (y \circ i + y \circ j + a) - x \circ j \circ (y \circ i + y \circ j) = 0$ и $x \circ (y + a) - x \circ y \in P \circ i$. В результате получаем, что $P \circ i \trianglelefteq P$. Точно так же $P \circ j \trianglelefteq P$. Теперь предположим, что T – монолит m-кольца P (т. е. наименьший ненулевой идеал, который существует ввиду того, что это m-кольцо подпрямо неразложимо). Так как $0 < i < 1$ и $0 < j < 1$, то $\{0\} \neq P \circ i \neq P$, $\{0\} \neq P \circ j \neq P$, так что должны выполняться включения $T \subseteq P \circ i$, $T \subseteq P \circ j$. Но это противоречит ортогональности идеалов $P \circ i$ и $P \circ j$. Следовательно, m-кольцо P $\mathcal{E}$-примарно, что и требовалось для доказательства. ■

Д о к а з а т е л ь с т в о т е о р е м ы 1. Предполагаем, что K – $\mathcal{E}$-центральное периодическое m-кольцо с единицей 1 и множество $\mathcal{E}(\mathrm{K})$ конечно. Известно [3], что перестановочность идемпотентов приводит к тому, что множество $\mathcal{E}(\mathrm{K})$ будет подполугруппой полугруппы $(\mathrm{K}, \circ)$ и является решеткой относительно операций «$\vee$» и «$\wedge$», где для $i, j \in \mathcal{E}(\mathrm{K})$ $i \vee j = i + j - i \circ j$, $i \wedge j = i \circ j$. Эта решетка имеет наименьший элемент 0, а ввиду наличия единицы (которая обозначается через 1) у полугруппы (K, $\circ$) эта единица есть наибольший элемент решетки ($\mathcal{E}$(K), $\vee$, $\wedge$). Более того, эта решетка является булевой. Для каждого элемента $i \in \mathcal{E}$(K) в качестве дополнения выступает элемент $i' = 1 - i$. Ввиду конечности $|\mathcal{E}(K)| = 2^n$ для некоторого $n \in \mathbb{N}$. Утверждение теоремы будем доказывать с помощью индукции по n. При $n = 1$ m-кольцо K – $\mathcal{E}$-примарное периодическое и утверждение тривиально. Пусть теперь $n > 1$ и предполагаем, что утверждение теоремы верно для $\mathcal{E}$-центральных периодических m-колец с единицей и числом идемпотентов, меньшим 2^n. Зафиксируем в решетке $\mathcal{E}$(K) некоторый атом i и положим $j = 1 - i = i'$. Так как $n > 1$, то $i < 1$, $j < 1$. Так же, как и в доказательстве леммы 2, устанавливается, что m-кольцо K разлагается в прямую сумму идеалов K $\circ$ i и K $\circ$ j, которые как гомоморфные образы K периодичны и $\mathcal{E}$-центральны. При этом m-кольцо K $\circ$ i $\mathcal{E}$-примарно, а K $\circ$ j имеет 2^{n-1} идемпотентов и по предположению индукции разлагается в прямую сумму конечного числа идеалов, являющихся $\mathcal{E}$-примарными периодическими m-кольцами. Значит, m-кольцо K разлагается в прямую сумму конечного числа таких же идеалов. Теорема доказана. ■

Доказательство теоремы 2. В предположении, что K – $\mathcal{E}$-примарное периодическое m-кольцо с единицей, потребуется несколько лемм.

Лемма 3. K = $\mathcal{N}$(K)$\sqcup G$(K) (*дизъюнктное объединение*).

Доказательство. Пусть $a \in$ K$\setminus\mathcal{N}$(K). Ввиду периодичности K моногенная полугруппа $A = \langle a \rangle_\circ$ конечна. Пусть $r, n \in \mathbb{N}$, где r − индекс, а n − период элемента a [4]. Тогда $|A| = r + n - 1$, а множество $B = \{a^{[r]}, \ldots, a^{[r+n-1]}\}$ − максимальная подгруппа полугруппы A, содержащая 1. Тогда $1 = a^{[k]}$ для некоторого $k \in \mathbb{N}$, $r \le k < r + n$. Однако $a = a \circ 1 = a^{[k+1]} \in B \subseteq G$(K), поэтому $r = 1$, $a \in G$(K) и K$\setminus\mathcal{N}$(K) = G(K). ■

Далее обозначим $N = \mathcal{N}$(K), $G = \mathcal{G}$(K). В этих предположениях верна

Лемма 4. $-G = G$ и $-N = N$.

Доказательство. Пусть $a \in G$, и предположим, что для некоторого $m \in \mathbb{N}_2$ $(-a)^{[m]} = 0$ и $(-a)^{[m-1]} \ne 0$. Тогда $-a \circ (-a)^{[m-1]} = 0$ и $a \circ (-a)^{[m-1]} = 0$. Умножая на $a^{[-1]}$ слева, получим $(-a)^{[m-1]} = 1 \circ (-a)^{[m-1]} = a^{[-1]} \circ (-a)^{[m-1]} = 0$, что противоречит минимальности m. Следовательно, $-G \subseteq G$, $-G = G$ и $-N = N$. ■

Лемма 5. $1 + N \subseteq G$.

Доказательство. Сначала предположим, что $a \in N$. Тогда $a^{[n]} = 0$ для некоторого $n \in \mathbb{N}$. Докажем, что $1 - a \in G$. Если это не так, то для некоторого наименьшего $m \in \mathbb{N}_2$ $(1 - a)^{[m]} = 0$. В этом случае $0 = (1 - a) \circ (1 - a)^{[m-1]} = (1 - a)^{[m-1]} - a \circ (1 - a)^{[m-1]}$. Значит, $(1 - a)^{[m-1]} = a \circ (1 - a)^{[m-1]} = a \circ a \circ (1 - a)^{[m-1]} = a^{[n]} \circ (1 - a)^{[m-1]} = 0$, что противоречит минимальности m. Значит, $1 - a \in G$ и с использованием леммы 4 имеем $1 + N \subseteq G$. ■

Лемма 6. $N \circ$ K $\subseteq N$.

Доказательство. Пусть $x \in$ K и $a \in N$. Тогда $a^{[n]} = 0$ для некоторого $n \in \mathbb{N}$. Предположим, от противного, что $a \circ x = b \in G$. Для некоторого $m \in \mathbb{N}$ будет $(a \circ x)^{[m]} = 1$. Если $m = 1$, то $a \circ x = 1$, $x \circ a \circ x \circ a = x \circ a \in \mathcal{E}$(K). Значит, либо $x \circ a = 1$, либо $x \circ a = 0$. В первом случае a и x коммутируют, поэтому $1 = (a \circ x)^{[n]} = (a)^{[n]} \circ (x)^{[n]} = 0$, противоречие. Во втором случае $1 = 1 \circ 1 = a \circ (x \circ a) \circ x = 0$ – и снова получаем противоречие. Итак, можем считать, что $m > 1$. Теперь $(x \circ a)^{[m+1]} = x \circ (a \circ x)^{[m]} = x \circ a$, поэтому $(x \circ a)^{[m]} \in \mathcal{E}$(K) и либо $(x \circ a)^{[m]} = 1$, либо $(x \circ a)^{[m]} = 0$. В первом случае

$$a = 1 \circ a = (x \circ a)^{[m]} \circ a = (x \circ a)^{[m-1]} \circ a \circ a = (x \circ a)^{[m-1]} \circ a \circ a \circ a = \ldots$$
$$\ldots = (x \circ a)^{[(n-1)(m-1)]} \circ (x \circ a)^{[m-1]} \circ (a)^{[n]} = 0.$$

Однако это противоречит тому, что $a \circ x \in G$. Во втором случае $a \circ x = (a \circ x)^{[m+1]} = a \circ (x \circ a)^{[m]} \circ x = 0$ – и снова приходим к противоречию. Значит, $N \circ$ K $\subseteq N$. ■

Лемма 7. $G + N \subseteq G$.

Доказательство. Пусть $a \in G$, $b \in N$. Так как согласно лемме 6 $b \circ a^{[-1]} \in N$, а по лемме 4 $1 + b \circ a^{[-1]} \in G$, то $a + b = (1 + b \circ a^{[-1]}) \circ a \in G$. Следовательно, $G + N \subseteq G$. ■

Лемма 8. $N + N \subseteq N$.

Доказательство. Пусть $a, b \in N$. Обозначим $c = a + b$. Если допустить, что $c \in G$, то, согласно леммам 3 и 6, $a = c - b \in G + N \subseteq G$, противоречие. Так что $c \in N$ и $N + N \subseteq N$. ■

Лемма 9. $N \bullet$ K $\subseteq N$.

Доказательство. Пусть $a \in N$ и $x \in$ K. Тогда $a^{[n]} = 0$ для некоторого $n \in \mathbb{N}$. Предположим, что $a \bullet x \in G$. Тогда для некоторого $m \in \mathbb{N}$ будет $(a \bullet x)^{[m]} = 1$. Если $m = 1$, то $a \bullet x = 1$. В этом случае с использованием (1)

$$a = (1 \circ a) = ((a \bullet x) \circ a) = (a \circ a) \bullet (x \circ a) = ((1 \circ a) \circ a) \bullet (x \circ a) = \ldots = (a^{[n]}) \bullet \ldots = 0$$

– и получаем противоречие. Если $m > 1$, то аналогично:

$$a = 1 \circ a = (a \bullet x)^{[m]} \circ a = (a \bullet x)^{[m-1]} \circ (a \bullet x) \circ a = (a \bullet x)^{[m-1]} \circ ((a \circ a) \bullet (x \circ a)) =$$
$$= (a \bullet x)^{[m-1]} \circ ((x \circ a) \bullet (a \circ a)) = (a \bullet x)^{[m-1]} \circ (x \circ a \bullet ((a \bullet x)^{[m]} \circ a \circ a)) =$$
$$= (a \bullet x)^{[m-1]} \circ ((x \circ a) \bullet (a \bullet x)^{[m-1]} \circ (\ldots((a \bullet x)^{[m-1]} \circ ((x \circ a) \bullet a^{[n]}))\ldots) = 0$$

– и снова получаем противоречие. Значит, $a \bullet x \in N$ и $N \bullet \mathrm{K} \subseteq N$. ◊

Лемма 10. *Множество N стабильно слева в* K.

Доказательство. Пусть $a \in N$ и $x, y \in \mathrm{K}$. Тогда $a^{[n]} = 0$ для некоторого $n \in \mathbb{N}$. Обозначим $u = x \circ (y + a) - x \circ y$. Предположим, что $u \in G$. В этом случае $1 = u \circ u^{[-1]} = x \circ (y \circ u^{[-1]} + a \circ u^{[-1]}) - x \circ y \circ u^{[-1]}$. По лемме 6 $a \circ u^{[-1]} \in N$, поэтому, заменяя $a \circ u^{[-1]}$ на a, $y \circ u^{[-1]}$ на y, приходим к равенству $1 = x \circ (y + a) - x \circ y$. Теперь, применяя некоторые преобразования к правой части, получим

$$x \circ (y + a) - x \circ y = x \circ (y + 1 \circ a) - x \circ y = x \circ (y + (x \circ (y + a) - x \circ y) \circ a) - x \circ y = x \circ (y + (x \circ (y \circ a +$$
$$+ a \circ a) - x \circ y \circ a)) - x \circ y = \ldots = x \circ (y + (x \circ (y \circ a + \ldots + x \circ (y \circ a^{[n-2]} + x \circ (y \circ a^{[n-1]} + a^{[n]}) +$$
$$+ (-x \circ y \circ a^{[n-1]}))) - x \circ y \circ a^{[n-2]}) + \ldots) - x \circ y = 0,$$

что приводит к противоречию. Значит, $x \circ (y + a) - x \circ y \in N$ и множество N стабильно слева в K. ■

Продолжение доказательства теоремы 2. То, что N является идеалом m-кольца K, непосредственно следует из лемм 4, 6, 8, 9, 10. Обозначим $L = \mathrm{K}/N$. Естественный гомоморфизм $\nu = \mathrm{nat}\, N$ отображает K на L, при этом благодаря тому, что $\mathrm{K} = G \cup N$, имеем $L = \nu(G) \cup \{0\}$. Множество $\nu(G)$ как гомоморфный образ группы $(G, \circ)$ есть подгруппа полугруппы $(L, \circ)$. Поэтому последняя является группой с внешне присоединенным нулем. Значит, L есть m-кольцо с делением. Итак, m-кольцо K является расширением ниль-m-кольца $\mathcal{N}(\mathrm{K})$ при помощи m-кольца с делением L. ■

Доказательство теоремы 3. Пусть K – $\mathcal{E}$-центральное периодическое m-кольцо. Рассмотрим множество $\mathcal{E}(\mathrm{K})$. Если $|\mathcal{E}(\mathrm{K})| = 1$, то ввиду периодичности $\mathcal{N}(\mathrm{K}) = \mathrm{K}$ и K является ниль-m-кольцом. Далее предполагаем, что $|\mathcal{E}(\mathrm{K})| > 1$ и $\mathcal{N}(\mathrm{K}) \neq \mathrm{K}$. Рассмотрим множество $J = (0 : \mathcal{E}(\mathrm{K}))$. Так как $(0 : \mathcal{E}(\mathrm{K})) = \bigcap_{i \in \mathcal{E}(\mathrm{K})} (0 : i)$, то согласно лемме 1 J является идеалом m-кольца K. Допустим сначала, что $J = \{0\}$. Тогда из предыдущего равенства следует, что K разлагается в подпрямое произведение фактор-m-колец $\mathrm{K}/(0 : i)$, $i \in \mathcal{E}(\mathrm{K})$. Каждое m-кольцо $\mathrm{K}/(0 : i)$ изоморфно под-m-кольцу $\mathrm{K} \circ i$ согласно лемме 1. Это последнее m-кольцо имеет единицу i и является $\mathcal{E}$-центральным периодическим m-кольцом как гомоморфный образ $\mathcal{E}$-центрального периодического m-кольца K. Применяя здесь теорему 2, получаем, что K разлагается в подпрямое произведение некоторого семейства $\mathcal{E}$-примарных периодических m-колец, т. е. выполняется возможность Б). Остается рассмотреть случай, когда $J \neq \{0\}$. Отметим, что $J \subseteq \mathcal{N}(\mathrm{K})$, иначе ввиду периодичности K для некоторого $a \in J$ и для некоторого $n \in \mathbb{N}$ $a^{[n]} = i \in \mathcal{E}(\mathrm{K})^{\#}$ и $a \circ i = 0$. Но тогда $i = i \circ i = a^{[n]} \circ i = a \circ \ldots \circ i = 0$, что приводит к противоречию.

Далее обозначим $L = \mathrm{K}/J$ и покажем, что $(0 : \mathcal{E}(L)) = \{0\}$. В самом деле, предположим, что $a \in \mathrm{K}$ и $a + J \in (0 : \mathcal{E}(L))$. Тогда для любого $i \in \mathcal{E}(\mathrm{K})$ $(a + J) \circ (i + J) = J$, откуда вытекает, что $a \circ i \in J = (0 : \mathcal{E}(\mathrm{K}))$. Но тогда $a \circ i = a \circ i \circ i = 0$, и так как i – произвольный идемпотент из K, то $a \in (0 : \mathcal{E}(\mathrm{K})) = J$ и $a + J = J$. Значит, $(0 : \mathcal{E}(L)) = \{0\}$ и по предыдущему L разлагается в подпрямое произведение некоторого семейства $\mathcal{E}$-примарных периодических m-колец, т. е. выполняется возможность В). Теорема доказана. ■

Пример 1. Пусть $(\mathrm{K}, +, \cdot, \circ)$ − m-кольцо с нулевым умножением, где $\mathrm{K} = \mathbb{Z}$ и почтикольцо $(\mathrm{K}, +, \circ)$ − кольцо целых рациональных чисел. Данное m-кольцо $\mathcal{E}$-примарно и вполне полупросто, но не является m-кольцом с делением. Так что условие периодичности в теореме 2 существенно. ■

Пример 2. Рассмотрим m-кольцо $(\mathrm{K}, +, \cdot, \circ)$, где $(\mathrm{K}, +, \cdot)$ − восьмиэлементное поле F_8 с первообразным элементом α, удовлетворяющим условию $\alpha^3 = \alpha + 1$. В этих обозначениях $\mathrm{K} = \{0, 1, \alpha, \alpha^2, \alpha^3, \alpha^4, \alpha^5, \alpha^6\}$, $\alpha^4 = \alpha + \alpha^2$, $\alpha^5 = 1 + \alpha + \alpha^2$, $\alpha^6 = 1 + \alpha^2$ и суперпозиция задается равенствами: $1 = 1 \circ \alpha = 1 \circ \alpha^2 = 1 \circ \alpha^4$, $\alpha = \alpha \circ \alpha^2 = \alpha^2 \circ \alpha = \alpha^4 \circ \alpha^4$, $\alpha^2 = \alpha \circ \alpha^4 = \alpha^2 \circ \alpha^2 = \alpha^4 \circ \alpha = \alpha^5 \circ \alpha^4$, $\alpha^3 = \alpha^3 \circ \alpha^2 = \alpha^6 \circ \alpha = \alpha^5 \circ \alpha^4$, $\alpha^4 = \alpha \circ \alpha = \alpha^2 \circ \alpha^4 = \alpha^4 \circ \alpha^2$, $\alpha^5 = \alpha^5 \circ \alpha^2 = \alpha^3 \circ \alpha = \alpha^6 \circ \alpha^4$, $\alpha^6 = \alpha^6 \circ \alpha^2 = \alpha^5 \circ \alpha = \alpha^3 \circ \alpha^4$, для остальных пар элементов суперпозиции равны нулю. Нетрудно проверить, что $(\mathrm{K}, +, \cdot, \circ)$ есть m-кольцо. При этом $\mathcal{E}(\mathrm{K}) = \{0, \alpha^2\} \not\subseteq C(\mathrm{K})$, $\mathcal{N}(\mathrm{K}) = \{0, 1, \alpha^3, \alpha^5, \alpha^6\}$ и $\alpha^6 + 1 = \alpha^2 \notin \mathcal{N}(\mathrm{K})$. m-Кольцо K, таким образом, является периодическим $\mathcal{E}$-коммутативным, у которого множество $\mathcal{N}(\mathrm{K})$ не является идеалом. ■

Этот пример показывает, что условие $\mathcal{E}$-центральности в теореме 3 нельзя ослабить до $\mathcal{E}$-коммутативности в отличие от ситуации в теории колец [11].

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Ширяев В. М. Кольца с дополнительной операцией суперпозиции. Минск, 2004. С. 271.
2. Ширяев В. М. Нуль-симметричные мультиоператорные почтикольца: в 3 т. [Электронный ресурс]. Минск, 2009. Т. 1. С. 280. Деп. в БелИСА 27.10. 09, № 200934.
3. Ширяев В. М. Нуль-симметричные мультиоператорные почтикольца: в 3 т. [Электронный ресурс]. Минск, 2009. Т. 2. С. 273. Деп. в БелИСА 27.10.09, № 200935.
4. Клиффорд А., Престон Г. Алгебраическая теория полугрупп: в 2 т. М., 1972. Т. 1. С. 285.
5. Холл М. Теория групп. М., 1962. С. 468.
6. Ван дер Варден М. Алгебра. М., 1970. С. 648.
7. Лидл Л., Нидеррайтер Г. Конечные поля: в 2 т. М., 1988. Т. 1. С. 428.
8. Pilz G. Near-rings. 2^{nd} ed. Amsterdam, 1983. P. 470.
9. Артамонов В. А., Салий В. Н., Скорняков Л. А., Севрин Л. Н., Шульгейфер Е. Г. Общая алгебра: в 2 т. М., 1991. Т. 2. С. 479.
10. Биркгоф Г. Теория решеток. М., 1984. С. 566.
11. Салий В. Н. Кольца с коммутирующими идемпотентами // Теория полугрупп и ее приложения: сб. Саратов, 1965. Вып. 1. С. 279–284.

Поступила в редакцию 25.02.13.

Владимир Михайлович Ширяев – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики.