УДК 517.9

Е. В. ПАНТЕЛЕЕВА

УСЛОВИЕ ПРАВОСТОРОННЕЙ ОБРАТИМОСТИ ОПЕРАТОРОВ ВЗВЕШЕННОГО СДВИГА В ПРОСТРАНСТВАХ ВЕКТОР-ФУНКЦИЙ

Рассматриваются операторы взвешенного сдвига в пространстве вектор-функций, порожденные отображением $\alpha : X \to X$, где X есть компактное топологическое пространство. Сформулированы достаточные условия правосторонней обратимости оператора $B - \lambda I$ с использованием устойчивых в положительном и отрицательном направлениях векториальных подмножеств. Более того, в явном виде построена правосторонняя резольвента.

В работе показано, что для модельного примера эти условия являются не только достаточными, но и необходимыми. Заметим также, что векториальные подмножества более сложной природы в подобных вопросах в теории динамических систем ранее практически не применялись.

Ключевые слова: операторы взвешенного сдвига; правосторонняя обратимость оператора; ассоциированное линейное расширение; векториальные подмножества.

Weighted shift operators B in the space of vector-functions on a set X generated by mapping $\alpha : X \to X$ are considered. Sufficient conditions of the right-side invertibility with using vectorial subsets formulated. Also right-side resolvent construct. These conditions are not only sufficient but also necessary for a model example. It is important that the vectorial subset of the study of the reversibility of the operator in dynamic systems have not been used.

Key words: weighted shift operator; right-sided invertibility; linear extension associated with the operator; vectorial subset.

При исследовании заданного оператора интерес представляют условия, при которых этот оператор односторонне обратим. Данная работа связана с исследованием односторонней обратимости $B - \lambda I$ в случае, когда B есть оператор взвешенного сдвига в пространстве вектор-функций.

Линейный ограниченный оператор B, действующий в банаховом пространстве вектор-функций $F(X)$ на произвольном множестве X, называется *оператором взвешенного сдвига* (ОВС), если он может быть представлен в виде

$$Bu(x) = A_0(x)u(\alpha(x)),\ x \in X,$$

где $\alpha : X \to X$ есть некоторое отображение, $A_0(x)$ – заданная матрично-значная функция на X. Такие операторы исследовались с разных точек зрения в связи с различными приложениями [1–3].

Спектральные свойства операторов взвешенного сдвига зависят от динамики отображения α, т. е. от поведения траекторий. Если α – обратимое отображение, то траекторией точки x_0 называется двусторонняя последовательность точек, заданная правилом

$$x_k = \alpha(x_{k-1}) = \alpha^k(x_0), \quad \alpha^k(x) = \alpha(\alpha^{k-1}(x)),\ k \in Z.$$

Условия односторонней обратимости оператора $B - \lambda I$ в пространстве вектор-функций ранее были получены только для одного специального класса отображений: в случае, когда $X = [0,1]$ и α имеет только две неподвижные точки 0 и 1, из которых одна отталкивающая и одна притягивающая [5, с. 18]. Это отображения с очень простыми динамическими свойствами, не имеющие седловых точек. Как следует из результатов [4, с. 226], наличие седловых точек усложняет задачу даже в скалярном случае.

Известным условием обратимости оператора $B - \lambda I$ в пространстве вектор-функций является существование разложения на подрасслоения, устойчивое и неустойчивое для ассоциированного с оператором $B - \lambda I$ линейного расширения β_λ отображения α^{-1} (см. разд. 2). Основным результатом данной работы является утверждение, что условия правосторонней обратимости в пространстве вектор-функций могут быть записаны в аналогичном виде. Принципиальное различие заключается в том, что в случае правосторонней обратимости следует вместо векторных подрасслоений рассмотреть векториальные подмножества. Заметим, что использование в подобных вопросах векторных подрасслоений является обычным в теории динамических систем, а векториальные подмножества более сложной природы ранее практически не использовались.

1. Стандартная форма оператора взвешенного сдвига. Пусть X есть компактное топологическое пространство, а отображение α – непрерывное и обратимое. Если на X задана борелевская мера, то оператор B может быть неограниченным в пространстве $L_p(X, C^m, \mu)$. Предполагаются выполненными следующие условия, обеспечивающие корректность задания оператора:

1) $\mu(w) \neq 0$ для каждого открытого множества w;

2) α сохраняет класс меры μ: $\mu(\alpha^{-1}(w)) = 0 \Leftrightarrow \mu(w) = 0$ для всех измеримых множеств w.

Из теоремы Радона – Никодима следует, что существует измеримая функция ρ такая, что $\rho(x) > 0$ почти всюду и для любой интегрируемой функции f выполнено равенство $\int\limits_X \rho(x) f(\alpha(x))\, d\mu = \int\limits_X f(x)\, d\mu$.

Тогда оператор $T_\alpha u(x) = \rho_p(x)u(\alpha(x))$, где $\rho_p(x) = \rho(x)^{1/p}$ является изометрическим и обратимым в пространстве $L_p(X, C^m, \mu)$.

Оператор B удобно записывать в *стандартном виде* $B = AT_\alpha$, где матрица-функция $A(x) = \rho(x)^{1/p} A_0(x)$ называется *приведенным коэффициентом*. Известно, что оператор B является ограниченным в пространстве $L_p\left(X, C^m, \mu\right)$ тогда и только тогда, когда приведенный коэффициент является существенно ограниченной по норме матрицей-функцией, при этом $\|B\| = ess\sup\|A(x)\|$, где $\|A(x)\|$ есть норма матрицы $A(x)$ как оператора в m-мерном пространстве. Ниже считаем, что оператор B действует в пространстве $L_p\left(X, C^m, \mu\right)$ при некотором фиксированном p и что приведенный коэффициент является невырожденной непрерывной матрично-значной функцией.

2. Ассоциированное линейное расширение. Оператор $B-\lambda I$ может быть записан в виде $B-\lambda I = \lambda\left(\lambda^{-1}B - I\right)$, где оператор $\lambda^{-1}B$ также является оператором взвешенного сдвига. Поэтому в дальнейшем будем рассматривать операторы вида $B - I$.

Произведение $E = X \times C^m$ рассматривается как векторное расслоение над X с естественной проекцией; слоем E_x над точкой $x \in X$ является множество $E_x = \left\{(x,\xi) : \xi \in C^m\right\} = \{x\} \times C^m$, изоморфное C^m. В каждом слое определена норма, ниже используется обозначение $\|(x,\xi)\| = \|\xi\|$.

Каждое подмножество $K \subset E$ разбивается на слои $K_x = K \cap E_x$. Подмножество K называется *векториальным*, если для любого x слой K_x является векторным подпространством в E_x и измеримо зависит от x.

Векториальное подмножество $K \subset E$ называется *векторным подрасслоением*, если слои K_x непрерывно зависят от x.

Ассоциированное с оператором B отображение $\beta : E \to E$ задается формулой $\beta(x,\xi) = \left(\alpha^{-1}(x), A\left(\alpha^{-1}(x)\right)\xi\right)$, $x \in X$, $\xi \in C^m$.

При отображении β слой над точкой x линейно отображается в слой над точкой $\alpha^{-1}(x)$, действующие таким образом отображения называются *линейными расширениями* отображения α^{-1} на векторное расслоение E [2, с. 66].

3. Устойчивые подмножества. Подмножество $K \in E$ называется *устойчивым в положительном направлении* (*отрицательном направлении*) относительно β, если существуют $C^+ > 0$ и $\gamma^+ < 1$ такие, что для всех $(x,\xi) \in K$ выполняется неравенство

$$\left\|\beta^k(x,\xi)\right\| \le C^+\left(\gamma^+\right)^k \|(x,\xi)\|,\ k > 0\ \left(\left\|\beta^{-k}(x,\xi)\right\| \le C^-\left(\gamma^-\right)^k \|(x,\xi)\|,\ k \ge 0\right). \tag{1}$$

Будем говорить, что векторное расслоение E есть *прямая сумма векториальных подможеств* (обозначаем $E = V^+ \oplus V^-$), если для каждого $x \in X$ выполнено $E_x = V_x^+ \oplus V_x^-$ и существует постоянная M такая, что $\|p(x)\| \le M$ для всех $x \in X$, где $p(x)$ есть проектор на V_x^+ в слое E_x с ядром в V_x^-.

Если подмножества V^+ и V^- являются векторными подрасслоениями, то в силу компактности X условие ограниченности в совокупности норм проекторов $p(x)$ выполнено автоматически. Условия обратимости оператора $B - I$ формулируются следующим образом [1, теорема 9.2]:

Предложение 1. *Пусть множество непериодических точек отображения α всюду плотно в X, выполнены указанные выше условия и приведенный коэффициент является непрерывной матрично-значной функцией. Оператор B – I обратим тогда и только тогда, когда существуют устойчивое в положительном направлении векторное подрасслоение* V^+ *и устойчивое в отрицательном направлении векторное подрасслоение* V^- *такие, что* $E = V^+ \oplus V^-$. *При этих условиях операторы* $B - \lambda I$ *обратимы при всех* λ *из некоторого кольца, содержащего единичную окружность.*

4. Достаточные условия правосторонней обратимости. Далее считаем, что выполнены вышеуказанные предположения, т. е. X есть компактное топологическое пространство, а отображение α – непрерывное и обратимое. Основным результатом работы является следующее утверждение:

Теорема 1. *Если существуют устойчивое в положительном направлении векториальное подмножество* V^+ *и устойчивое в отрицательном направлении векториальное подмножество* V^- *такие, что*

$$E = V^+ \oplus V^-, \tag{2}$$

то оператор $B - \lambda I$ *обратим справа для всех* λ*, принадлежащих некоторому кольцу, содержащему единичную окружность, и одна из правосторонних резольвент в этом кольце может быть построена по формуле*

$$R(\lambda, B) = \sum_{k=-\infty}^{-1} \lambda^k B^{-k-1} P - \sum_{k=0}^{+\infty} \lambda^k B^{-k-1}(I - P), \tag{3}$$

где P *есть проектор в* $L_p(X, C^m)$*, действующий по формуле* $Pu(x) = p(x)u(x)$.

Доказательство. Так как проекторы $p(x)$ измеримо зависят от x, для $u \in F(X)$ вектор-функция $p(x)u(x)$ измерима и $\int_X \|p(x)u(x)\|^p dx \le M^p \int_X \|u(x)\|^p dx$. Поэтому оператор P ограничен и $\|P\| \le M$, где $M = \sup_X \{\|p(x)\|\}$. Докажем сходимость по норме ряда из ограниченных линейных операторов

$$\sum_{k=-\infty}^{-1} \lambda^k B^{-k-1} P = \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda^{-n-1} B^n P. \tag{4}$$

Оператор B^n действует по формуле

$$(B^n u)(x) = A(x) A(\alpha(x)) \cdots A(\alpha^{n-1}(x)) \prod_{k=0}^{n-1} \rho(\alpha^k(x)) u(\alpha^n(x)),$$

т. е. $B^n u = A_n T_\alpha^n u$, где A_n есть оператор умножения на матрицу-функцию $A_n(x) = A(x) A(\alpha(x)) \cdots A(\alpha^{n-1}(x))$.

Отображение β^n переводит вектор ξ из слоя E_x в вектор ψ из слоя $E_{\alpha^{-n}(x)}$ по формуле $\beta^n(x,\xi) = \left(\alpha^{-n}(x), A(\alpha^{-n}(x)) A(\alpha^{-n+1}(x)) \cdots A(\alpha^{-1}(x))\xi\right)$. В частности, вектор ξ из слоя $E_{\alpha^n(x)}$ при отображении β^n переходит в вектор ψ из слоя E_x, заданный формулой $\psi = A(\alpha(x)) A(\alpha(x)) \cdots A(\alpha^{n-1}(x))\xi$. Это позволяет записать действие оператора B^n с использованием отображения β^n. Вектор $u(\alpha^n(x))$ принадлежит слою $E_{\alpha^n(x)}$, значит, вектор $(B^n u)(x) = A(x) A(\alpha(x)) \cdots A(\alpha^{n-1}(x)) \prod_{k=0}^{n-1} \rho(\alpha^k(x)) u(\alpha^n(x))$ принадлежит слою E_x, и из выражения для β^n получаем

$$(B^n u)(x) = \left[\prod_{k=0}^{n-1} \rho(\alpha^k(x))\right] \beta^n(\alpha^n(x)) u(\alpha^n(x)). \tag{5}$$

Рассмотрим теперь операторы $B^n P$. Пусть $v = Pu$ и $\eta_n = B^n v$. Так как $v = Pu$, то для любого x вектор $v(x) = p(x)u(x)$ принадлежит слою V_x^+, в частности, вектор $v(\alpha^n(x))$ принадлежит слою $V_{\alpha^n(x)}^+$.

По определению устойчивости подмножества V^+ выполнено неравенство (1). Поэтому для нормы вектора $\eta_n(x)$ выполнено неравенство

$$\|\eta_n(x)\| \le C^+ (\gamma^+)^n \left[\prod_{k=0}^{n-1} \rho_p(\alpha^k(x))\right] \|v(\alpha^n(x))\|. \tag{6}$$

Норму вектор-функции u в пространстве $L_p(X, C^m, \mu)$ будем обозначать $\|\|u\|\|$. Неравенство (6) позволяет получить оценку нормы вектор-функции $\eta_n = B^n v$ в пространстве $L_p(X, \mu)$:

$$\|\|B^n v\|\| = \left(\int_X \|\eta_n(x)\|^p d\mu\right)^{1/p} \le \left(\int_X \left\{\tilde{N}^+ (\gamma^+)^n \left[\prod_{k=0}^{n-1} \rho_p(\alpha^k(x))\right] \|v(\alpha^n(x))\|\right\}^p d\mu\right)^{1/p} =$$

$$= \tilde{N}^+ (\gamma^+)^n \left(\int_X \left[\prod_{k=0}^{n-1} \rho_p(\alpha^k(x))\right] \|v(\alpha^n(x))\|^p d\mu\right)^{1/p}.$$

Применяя к последнему интегралу формулу (5), получаем требуемое неравенство $\|B^n P\| \le C^+ (\gamma^+)^n M$. Согласно полученным оценкам, ряд из норм операторов из (4) мажорируется рядом $\sum_{n=0}^{+\infty} \lambda^{-n-1} \tilde{N}^+ (\gamma^+)^n M$, который сходится при $|\lambda| > \gamma^+$. Аналогично получаем сходимость операторного ряда $\sum_{k=0}^{+\infty} \lambda^k B^{-k-1}(I - P)$ при $|\lambda| < \frac{1}{\gamma^-}$. Окончательно получаем, что ряд (3) сходится в кольце $\left\{\lambda : \gamma^+ < |\lambda| < \frac{1}{\gamma^-}\right\}$. Тот факт, что сумма этого ряда в указанном кольце задает правый обратный к $B - \lambda I$, проверяется прямыми вычислениями.

5. Модельный пример. Пусть $X \subset \mathbb{R}^3$ есть куб вида $X = \{(x_1, x_2, x_3) : 0 \le x_j \le 1\}$ и диффеоморфизм $\alpha : X \to X$ задан формулой

$$\alpha(x_1, x_2, x_3) = (\psi(x_1), \psi(x_2), \psi(x_3)), \tag{7}$$

где $\psi : [0,1] \to [0,1]$ есть диффеоморфизм отрезка, имеющий две неподвижные точки: $\psi(0) = 0$, $\psi(1) = 1$, $\psi(x) > x$ при $0 < x < 1$. Отображение α относится к числу так называемых отображений типа Морса –

Смейла, неподвижными точками являются вершины куба τ_j и только они. При этом точка $\tau_0=(0,0,0)$ – отталкивающая, точка $\tau_7=(1,1,1)$ – притягивающая, а остальные 6 вершин являются седловыми.

Пусть приведенный коэффициент A является диагональной матрицей $A=\operatorname{diag}\{a_1(x),a_2(x),\dots,a_m(x)\}$, где скалярные функции $a_l(x)$ непрерывны на X. Тогда оператор B разлагается в прямую сумму операторов, действующих в пространствах скалярных функций, поэтому условия (2) правосторонней обратимости $B-\lambda I$ могут быть получены из результатов [4]. Эти условия записываются в виде некоторых наборов неравенств между спектральным параметром λ и значением скалярного коэффициента $a(x)$ в неподвижных точках τ_k. Причем этот набор неравенств определяется динамикой отображения α. В частности, условие, что в неподвижных точках $|a(\tau_k)|\neq 1$, является необходимым для односторонней обратимости $B-I$.

Для каждого значения $|a_l(\tau_j)|\neq 1$ имеется две возможности: $|a_l(\tau_j)|<1$ или $|a_l(\tau_j)|>1$. Таким образом, имеется 2^{8m} возможных набора неравенств и требуется среди них выделить те, при которых оператор правосторонне обратим. Существенные в рассматриваемом вопросе свойства динамики отображения α описываются с помощью ориентированного графа $G(\alpha)$, вершинами которого являются неподвижные точки. В рассматриваемом примере множество ребер графа можно изобразить как множество ребер рассматриваемого куба, которые ориентированы так $\tau_i\to\tau_j$, что сумма координат точки τ_j больше суммы координат точки τ_i. Каждой неподвижной точке поставим в соответствие *индексное множество* $J(\tau_j)=\{1\le l\le m:|a_l(\tau_j)|<1\}$. Векторное подпространство $L(\tau_j)$ в $\mathbb{C}^m$ порождено теми базисными векторами e_l, для которых $l\in J(\tau_j)$.

Теорема 2. *Пусть B есть оператор взвешенного сдвига, порожденный отображением* (7)*, с приведенным коэффициентом* $A(x)=\rho(x)^{1/p}A_0(x)$, *и пусть выполнены необходимые условия* $|a_l(\tau_k)|\neq 1$ *для всех l и i. Следующие утверждения эквивалентны:*

1) *оператор* $B-I$ *обратим справа;*

2) *существуют векториальные подмножества* $V^{\pm}$, *удовлетворяющие условиям теоремы 1;*

3) *для каждого ориентированного ребра* $\tau_i\to\tau_j$ *графа* $G(\alpha)$ *выполнено условие* $J(\tau_j)\subset J(\tau_i)$.

При выполнении этих условий правосторонне обратимы операторы $B-\lambda I$ *при всех* λ, *удовлетворяющих условию* $r^-<|\lambda|<r^+$, *где* $r^-=\max\limits_{lj}\{|a_l(\tau_j)|:|a_l(\tau_j)|<1\}$, $r^+=\min\limits_{lj}\{|a_l(\tau_j)|:|a_l(\tau_j)|>1\}$.

Доказательство. Требуется только проверить, что из 3) следует 2). Остальные случаи следуют из сказанного выше. При выполнении 3) требуемые векториальные подмножества могут быть построены следующим образом. Зафиксируем непересекающиеся окрестности $W(\tau_j)$ и положим $V_x^+=L(\tau_j)$ для $x\in W(\tau_j)$ и $0\le j<7$; для $x\in X\setminus\bigcup_{j=0}^{6}W(\tau_j)$ положим $V_x^+=L(\tau_7)$.

* * *

Таким образом, для рассмотренного примера условия существования требуемых векториальных подмножеств удается записать в явном виде, причем эти условия являются необходимыми и достаточными для правосторонней обратимости.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Антоневич А. Б. Линейные функциональные уравнения: операторный подход. Минск, 1988.
2. Бронштейн И. У. Неавтономные динамические системы. Кишинев, 1984.
3. Каток А. Б., Хасселблат Б. Введение в современную теорию динамических систем. М., 1999.
4. Antonevich A., Makowska Yu. On spectral properties of weighted shift operators generated by mappings with saddle points // Complex analysis and Operator theory. 2008. Vol. 2. P. 215–240.
5. Антоневич А. Б. Когерентная локальная гиперболичность линейного расширения // Функц. анализ и его прил. 2005. Т. 39, вып. 1. С. 52–69.

Поступила в редакцию 19.08.13.

Екатерина Васильевна Пантелеева – аспирант кафедры функционального анализа. Научный руководитель – доктор физико-математических наук, профессор кафедры функционального анализа А. Б. Антоневич.