УДК 513.51

Е. В. ДИРВУК, К. А. СМОТРИЦКИЙ

РАЦИОНАЛЬНЫЕ КВАДРАТУРНЫЕ ФОРМУЛЫ ТИПА РАДО

Объектом исследования в данной работе являются квадратурные формулы интерполяционно-рационального типа на отрезке. Цель исследования – построение квадратурных формул типа Радо и изучение некоторых их свойств. Раскрывается актуальность темы, приведены ссылки не некоторые статьи, связанные с данной тематикой. Описано построение интерполяционных рациональных функций Лагранжа с узлами в нулях синус-дробей Чебышева – Маркова и одной заранее фиксированной точке –1 и 1, вычислены коэффициенты квадратурных формул типа Радо, построенных с применением указанных функций Лагранжа. Изучены некоторые свойства построенных квадратурных формул, в частности, дана оценка их погрешности. Полученные результаты могут быть использованы для дальнейшего исследования квадратурных формул, а также для изучения свойств интерполяционных рациональных функций.

Ключевые слова: рациональные квадратурные формулы; интегрирование на отрезке; рациональные дроби Чебышева – Маркова; рациональная аппроксимация.

The research object of this paper are the quadrature formula rational interpolation type on the segment. The major goal is the construction of Radau type quadrature formulas and some of their properties research. At the beginning of the paper specified relevance of research theme and references to some related articles. The rational interpolating Lagrange functions construction with nodes in the zeros of Chebyshev – Markov sine-fractures and one fixed point of –1 and 1 is considered in the present paper. The main part of the paper is devoted to the computation of the coefficients of Radau-type quadrature formulas constructed with the use of specified Lagrange functions and estimation of their error in particular. The received results can be used in further research of quadrature formulas and for studying the properties of rational interpolating functions.

Key words: rational quadrature formulas; integration on the segment; Chebyshev – Markov rational functions; rational approximation.

Квадратурные формулы интерполяционного типа представляют собой одно из актуальных направлений теории приближений. Классические результаты, полученные в полиномиальном случае, подробно описаны, например, в монографии [1]. Отметим, что, для того чтобы квадратурная формула обладала наилучшими в некотором смысле свойствами, в качестве ее узлов выбирают нули специальных полиномов (например, многочленов Чебышева первого или второго рода).

Отдельной проблемой в подобных исследованиях является задача построения квадратурных формул, часть узлов которых задается заранее, другая же часть узлов может быть взята произвольно (необходимость таких квадратурных формул возникает, например, при решении различных граничных задач). При этом если фиксируются оба конца рассматриваемого отрезка, то такая квадратурная формула называется квадратурной формулой типа Лобатто, если же один – квадратурной формулой типа Радо. Достаточно подробно подобные результаты в полиномиальном случае изложены в [2].

При решении указанных задач в рациональном случае возникает проблема выбора системы функций, нули которых выступают в качестве узлов интерполирования. Одним из классических способов решения этой задачи на отрезке является использование косинус- и синус-дробей Чебышева – Маркова. Такой подход был предложен и развит Е. А. Ровбой [3]. В продолжение этих исследований была построена квадратурная формула типа Лобатто [4]. Некоторые вопросы, связанные с построением квадратурных формул на вещественной прямой, были рассмотрены в работе [5]. Следует отметить, что П. Борвейн, Т. Эрдели, Д. Чанг в [6] используют несколько иной подход к построению системы рациональных функций, обобщающих классические многочлены Чебышева. Соответствующие квадратурные формулы построены в [7, 8].

В данной работе рассматриваются вопросы, связанные с изучением рациональных квадратурных формул типа Радо следующего вида:

$$\int_{-1}^{1} f(x)\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}dx \approx A_0 f(1) + \sum_{k=1}^{n-1} A_k f(x_k), \tag{1}$$

$$\int_{-1}^{1} f(x)\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}dx \approx B_n f(-1) + \sum_{k=1}^{n-1} B_k f(x_k). \qquad (2)$$

При этом в качестве узлов x_k, $k = 1, ..., n-1$, выбираются нули синус-дроби Чебышева – Маркова.

Пусть $\{a_k\}_{k=1}^{n}$ – произвольная последовательность чисел, удовлетворяющая условиям: 1) если $a_k \in R$, то $|a_k| < 1$; 2) если $a_k \in C$, то среди указанных чисел есть такое число a_l, что $a_l = \overline{a_k}$; 3) $a_1 = 0$.

Рассмотрим синус-дробь Чебышева – Маркова

$$N_n(x) = \frac{\sin \mu_n(x)}{\sqrt{1-x^2}}, \ x \in [-1;1],$$

где

$$\mu_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \arccos \frac{x+a_k}{1+a_k x},$$

причем

$$\mu_n'(x) = -\frac{\lambda_n(x)}{\sqrt{1-x^2}}, \ \lambda_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\sqrt{1-a_k^2}}{1+a_k x}, \ n \in \mathbf{N}.$$

При заданном выборе последовательности чисел $\{a_k\}_{k=1}^{n}$ функция N_n имеет на отрезке $[1;1]$ $n-1$ различных вещественных нулей:

$$-1 < x_{n-1} < x_{n-2} < ... < x_1 < 1, \ N_n(x_k) = 0, \ \mu_n(x_k) = k\pi, \ k = 1, ..., n-1.$$

Вначале опишем процесс построения квадратурной формулой (1).

Для произвольной функции $f \in C[-1;1]$ составим интерполяционную рациональную функцию Лагранжа с узлами в точках x_k, $k = 1, ..., n-1$, $x_0 = 1$:

$$L_n(x, f) = \sum_{k=1}^{n} f(x_k) \frac{(1-x)N_n(x)}{\left((1-x)N_n(x)\right)'\Big|_{x=x_k}(x-x_k)}. \qquad (3)$$

Прежде всего заметим, что несложные подсчеты позволяют представить функцию Лагранжа (3) в следующем виде:

$$L_n(x, f) = \frac{f(1)N_n(x)}{\lambda_n(1)} + \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^{k+1} f(x_k) \frac{(1+x_k)(1-x)N_n(x)}{\lambda_n(x_k)(x-x_k)}. \qquad (4)$$

Полагая $f(x) \approx L_n(x,f)$, с помощью (4) построим квадратурную формулу

$$\int_{-1}^{1} f(x)\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}dx \approx \int_{-1}^{1} L_n(x, f)\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}dx = A_0 f(1) + \sum_{k=1}^{n-1} A_k f(x_k). \qquad (5)$$

Теорема 1. *Квадратурная формула* (5) *имеет вид*

$$\int_{-1}^{1} f(x)\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}dx \approx \frac{f(1)}{\lambda_n(1)}\pi + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{f(x_k)(1+x_k)}{\lambda_n(x_k)}\pi.$$

Доказательство. Используя равенство (4), несложно получить

$$\int_{-1}^{1} L_n(x, f)\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}dx = \frac{f(1)}{\lambda_n(1)} I_0 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(-1)^{k+1} f(x_k)(1+x_k)}{\lambda_n(x_k)} I_k, \qquad (6)$$

где

$$I_0 = \int_{-1}^{1} \frac{\sin \mu_n(x)}{1-x} dx, \quad I_k = \int_{-1}^{1} \frac{\sin \mu_n(x)}{x-x_k} dx, \ k = 1, ..., n-1.$$

Вначале рассмотрим интеграл

$$I_0 = \int_{-1}^{1} \frac{\sin \mu_n(x)}{1-x} dx.$$

Сделаем замену $x = (1-y^2)/(1+y^2)$. Известно, что

$$\sin \mu_n \left(\frac{1-y^2}{1+y^2} \right) = (-1)^n \sin \Phi_n(y)$$

– синус-дробь Бернштейна с нулями в точках $\pm y_k$, $y_k = \sqrt{(1-x_k)/(1+x_k)}$, $k = 1, ..., n-1$. Таким образом,

$$1-x = \frac{2y^2}{1+y^2}, \quad dx = \frac{-4y}{\left(1+y^2\right)^2} dy,$$

$$I_0 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1+y^2}{2y^2} \frac{(-1)^{n+1} 4y}{\left(1+y^2\right)^2} \sin \Phi_n(x) dy = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \sin \Phi_n(x)}{y\left(1+y^2\right)} dy.$$

Далее используем метод, предложенный в [9, с. 92]. Рассмотрим вспомогательный интеграл

$$J_0(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \Phi_n(x)}{(y-z)(1+y^2)} dy,$$

а затем интеграл I_0 найдем с помощью предельного перехода

$$I_0 = \lim_{z \to 0,\ \operatorname{Im} z > 0} J_0(z).$$

Из [9, с. 48] следует, что

$$\sin \Phi_n(y) = \frac{1}{2i} \left(\prod_{j=1}^{n} \frac{y-z_j}{y-\overline{z_j}} - \prod_{j=1}^{n} \frac{y-\overline{z_j}}{y-z_j} \right),$$

где точки z_k являются корнями уравнения $y^2 + \dfrac{1+a_k}{1-a_k} = 0$, $\operatorname{Im} z_k > 0$, $k = 1, 2, ..., n$. При этом ограничения, налагаемые на параметры a_k, $k = 1, 2, ..., n$, влекут выполнение следующих условий: 1) $z_1 = i$, 2) паре комплексно-сопряженных параметров из множества $\{a_k\}_{k=1}^{n}$ соответствует пара симметричных относительно мнимой оси параметров из множества $\{z_k\}_{k=1}^{n}$.

Теперь интеграл I_0 представим в виде суммы

$$J_0(z) = \frac{1}{2i} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\prod_{j=1}^{n} \frac{y-z_j}{y-\overline{z_j}} - \prod_{j=1}^{n} \frac{y-\overline{z_j}}{y-z_j} \right) \frac{1}{(y-z)\left(1+y^2\right)} dy = \frac{1}{2i} \left(J_0'(z) - J_0''(z) \right), \tag{7}$$

где

$$J_0'(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{j=1}^{n} \frac{y-z_j}{y-\overline{z_j}} \frac{1}{(y-z)\left(1+y^2\right)} dy, \quad J_0''(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{j=1}^{n} \frac{y-\overline{z_j}}{y-z_j} \frac{1}{(y-z)(1+y^2)} dy.$$

Для вычисления этих интегралов применим теорию вычетов. Из условия $z_1 = i$ следует, что подынтегральная функция интеграла $J_0'(z)$ в верхней полуплоскости имеет лишь одну особую точку $y = z$. Поэтому

$$J_0'(z) = 2\pi i \operatorname*{res}_{y=z} \prod_{j=1}^{n} \frac{y-z_j}{y-\overline{z_j}} \frac{1}{(y-z)\left(1+y^2\right)} = 2\pi i \lim_{y \to z} \prod_{j=1}^{n} \frac{y-z_j}{y-\overline{z_j}} \frac{y-z}{(y-z)\left(1+y^2\right)} =$$

$$= \frac{2\pi i}{1+z^2} \prod_{j=1}^{n} \frac{z-z_j}{z-\overline{z_j}}. \tag{8}$$

Что же касается интеграла $J_0''(z)$, то его подынтегральная функция аналитична в нижней полуплоскости, значит,

$$J_0''(z) = 0. \tag{9}$$

Подставляя (8) и (9) в (7), получаем

$$J_0(z) = \pi \prod_{j=1}^{n} \frac{z-z_j}{z-\overline{z_j}}.$$

Переходя к интегралу I_0, будем иметь

$$I_0 = \lim_{z\to 0,\, \operatorname{Im} z>0} \pi \prod_{j=1}^{n} \frac{z - z_j}{z - \overline{z_j}} = \pi \prod_{j=1}^{n} \frac{z_j}{\overline{z_j}}.$$

Учитывая свойства последовательности $\{z_k\}_{k=1}^{n}$, симметричность точек z_j, возвращаясь к вычислению интеграла I_0, получим

$$I_0 = \pi.$$

Интегралы I_k, $k = 1,2, ..., n-1$, вычислены в работе [9, c. 87]:

$$I_k = -\left(1+y_k^2\right)\frac{\pi}{1+y_k^2}\prod_{j=1}^{n}\frac{y_k - z_j}{y_k - \overline{z_j}} = \left(-1\right)^{k+1}\pi. \tag{10}$$

Подставим полученные результаты для интегралов (10) и (11) в (6). Окончательно получим

$$\int_{-1}^{1} f\left(x\right)\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}dx \approx \frac{f\left(1\right)}{\lambda_n\left(1\right)}\pi + \sum_{k=1}^{n-1}\frac{f\left(x_k\right)\left(1+x_k\right)}{\lambda_n\left(x_k\right)}\pi.$$

Теорема 1 доказана.

Замечание 1. Аналогичными методами можно вычислить коэффициенты квадратурной формулы (2)

$$\int_{-1}^{1} f\left(x\right)\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}dx \approx \pi\frac{f\left(-1\right)}{\lambda_n\left(-1\right)} + \sum_{k=1}^{n-1}\frac{f\left(x_k\right)\left(1-x_k\right)}{\lambda_n\left(x_k\right)}\pi.$$

Замечание 2. Полагая $a_k = 0$, $k = 0, 1, ..., n$, получим соответствующие квадратурные формулы полиномиального типа

$$\int_{-1}^{1} f\left(x\right)\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}dx \approx \frac{\pi}{n}\left(f\left(1\right) + \sum_{k=1}^{n-1} f\left(\cos\frac{k\pi}{n}\right)\left(1+\cos\frac{k\pi}{n}\right)\right).$$

С учетом неотрицательных значений, принимаемых вещественнозначной функцией λ_n при заданном выборе параметров $\{a_k\}_{k=1}^{n}$ и точности интерполяционной функции Лагранжа для константы, коэффициенты полученных квадратурных формул будут иметь следующие свойства.

Лемма 1. *Пусть*

$$A_0 = \frac{\pi}{\lambda_n(1)},\ A_k = \frac{1+x_k}{\lambda_n(x_k)}\pi,\ k = 1, 2, ..., n-1;$$

$$B_k = \frac{1-x_k}{\lambda_n(x_k)}\pi,\ k = 1, 2, ..., n-1,\ B_n = \frac{\pi}{\lambda_n(-1)}.$$

Имеют место следующие соотношения:

$$A_k > 0,\ \ k = 1, 2, ..., n-1,\ \sum_{k=0}^{n-1} A_k = \pi;$$

$$B_k > 0,\ \ k = 1, 2, ..., n,\ \sum_{k=1}^{n} B_k = \pi.$$

Теперь рассмотрим вопрос точности полученных квадратурных формул. Обозначим

$$R_n(f) = \int_{-1}^{1} f(x)\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}dx - \frac{f(1)}{\lambda_n(1)}\pi - \sum_{k=1}^{n-1}\frac{f(x_k)(1+x_k)}{\lambda_n(x_k)}\pi$$

как погрешность квадратурной формулы (5).

Пусть

$$\mathbf{R}_n\left(a\right) = \left\{ r_n\left(x\right) : r_n\left(x\right) = \frac{p_n\left(x\right)}{\prod_{k=2}^{n}\left(1+a_k x\right)},\, p_n \in \mathbf{P}_n \right\},$$

где $\mathbf{P}_n$ – множество алгебраических многочленов степени не выше n.

В силу того, что $L_n(x;r_n) \equiv r_n(x)$ для $r_n \in \mathbf{R}_n(a)$, получим $R_n(r_n) = 0$. Более того, имеет место следующий результат.

Лемма 2. *Квадратурная формула* (2) *точна для всякой рациональной функции* $r_{2n-1} \in \mathbf{R}_{2n-1,2}(a)$ *вида*

$$\frac{p_{2n-1}(x)}{\left(\prod_{k=2}^{n}(1+a_k x)\right)^2},$$

$p_{2n-1}(x)$ *– многочлен степени не выше* $2n-1$*, а для ее остаточного члена имеет место следующая оценка:*

$$|\mathbf{R}_n(f)| \le 2\pi \mathbf{R}^*_{2n-1}(f;a),$$

где $\mathbf{R}^*_{2n-1}(f;a)$ *– наилучшее равномерное приближение функции* f *посредством рациональных функций из* $\mathbf{R}_{2n-1,2}(a)$.

Доказательство. Пусть $r_{2n-1} \in \mathbf{R}_{2n-1,2}(a)$. В силу того, что $L_n(x_k; r_{2n-1}) \equiv r_{2n-1}(x_k)$, $k = 0,1,...,n-1$, получим

$$r_{2n-1}(x) - L_n(x; r_{2n-1}) = \frac{p_{n-1}(x)\prod_{k=0}^{n-1}(x-x_k)}{\left(\prod_{k=2}^{n}(1+a_k x)\right)^2} = (1-x)\frac{p_{n-1}(x)}{\prod_{k=2}^{n}(1+a_k x)} N_n(x),$$

где $p_{n-1}(x)$ – многочлен степени не выше $n-1$. Тогда

$$\int_{-1}^{1} r_{2n-1}(x)\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}dx = \int_{-1}^{1}\frac{p_{n-1}(x)}{\prod_{k=2}^{n}(1+a_k x)} N_n(x)\sqrt{1-x^2}dx + \int_{-1}^{1} L_n(x; r_{2n-1})\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}dx = I_1 + I_2.$$

Учитывая соответствующую лемму (см. [10, с. 74]), интеграл $I_1 = 0$. В силу того, что $L_n(x; r_{2n-1}) \in \mathbf{R}_n(a)$, для вычисления интеграла I_2 применим квадратурную формулу (5):

$$I_2 = \frac{L_n(1; r_{2n-1})}{\lambda_n(1)}\pi + \sum_{k=1}^{n-1}\frac{L_n(x_k; r_{2n-1})(1+x_k)}{\lambda_n(x_k)}\pi = \frac{r_{2n-1}(1)}{\lambda_n(1)}\pi + \sum_{k=1}^{n-1}\frac{r_{2n-1}(x_k)(1+x_k)}{\lambda_n(x_k)}\pi.$$

Лемма 2 доказана.

* * *

В работе построены рациональные интерполяционные функции Лагранжа на отрезке [–1,1] с узлами в нулях синус-дробей Чебышева – Маркова и одной заранее фиксированной точке –1 и 1. На основании полученных функций Лагранжа построены квадратурные формулы типа Радо.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Крылов В. И. Приближенное вычисление интегралов. М., 1967.
2. Никольский С. М. Квадратурные формулы. М., 1988.
3. Ровба Е. А. Квадратурные формулы интерполяционно-рационального типа // Докл. АН Беларуси. 1996. Т. 40, № 3. С. 42–46.
4. Ровба Е. А., Смотрицкий К. А. Рациональное интерполирование в нулях синус-дробей Чебышева – Маркова // Докл. НАН Беларуси. 2008. Т. 52, № 5. С. 11–15.
5. Русак В. Н., Филиппова Н. К. Квадратурные формулы для несобственных интегралов, точные на рациональных функциях // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 2005. № 1. С. 6–10.
6. Borwein P., Erdelyi T., Zhang J. Chebyshev polynomials and Markov – Bernstein type inequalities for rational spaces // J. London Math. Soc. 1994. Vol. 50, № 2. P. 501–519.
7. Min G. Lobatto-type quadrature formula in rational spaces // J. of Computational and Applied Mathematics. 1998. № 94. P. 1–12.
8. Deckers K., Bultheel A., Perdomo-Pio F. Rational Gauss-Radau and rational Szego-Lobatto quadrature on the interval and the unit circle respectively // Jaen J. Approx. 2011. № 3 (1). P. 15–66.
9. Русак В. Н. Рациональные функции как аппарат приближения. Минск, 1979.
10. Ровба Е. А. Интерполяция и ряды Фурье в рациональной аппроксимации. Гродно, 2001.

Поступила в редакцию 22.05.13.

Евгений Владимирович Дирвук – аспирант кафедры теории функций, функционального анализа и прикладной математики Гродненского государственного университета им. Янки Купалы. Научный руководитель – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой теории функций, функционального анализа и прикладной математики Гродненского государственного университета им. Янки Купалы Е. А. Ровба.

Константин Анатольевич Смотрицкий – доцент кафедры теории функций, функционального анализа и прикладной математики Гродненского государственного университета им. Янки Купалы.