УДК 517.948.32

І. Л. ВАСІЛЬЕЎ, Д. А. НАВІЧКОВА

МАТРЫЧНАЕ АДНАРОДНАЕ РОЗНАСНАЕ РАЎНАННЕ ПЕРШАГА ПАРАДКУ СА ЗМЕННЫМІ КАЭФІЦЫЕНТАМІ Ў КАМУТАТЫЎНЫМ ВЫПАДКУ

Построена алгебра $K^{m\times m}$ матричных гиперпоследовательностей с умножением в виде свертки. В этой алгебре определены операции алгебраического интегрирования, дифференцирования и класс вполне коммутативных матриц. Сформулированы некоторые необходимые и достаточные условия, согласно которым матрица принадлежит этому классу. Изучены алгебраические, функциональные и дифференциальные свойства вполне коммутативных матриц.

Рассмотрено однородное разностное уравнение с переменными вполне коммутативными коэффициентами. Этому уравнению было поставлено в соответствие алгебраическое дифференциальное уравнение первого порядка в алгебре $K^{m\times m}$. При наложении некоторых условий на собственные значения матричных коэффициентов было получено общее решение рассматриваемого уравнения в алгебре $K_0^{m\times m}$ матричных последовательностей.

Ключевые слова: дискретные уравнения; разностные уравнения; матричные уравнения; дискретное операционное исчисление; последовательности; гиперпоследовательности.

The algebra $K^{m\times m}$ of matrix hypersequences with convolution multiplication is constructed. In this algebra we define the operations of algebraic differentiation and integration and the class of completely commutative matrices. Some necessary and sufficient conditions under which the matrix belongs to this class are stated. The algebraic, functional and differential properties of completely commutative matrices are studied.

We consider homogeneous difference equation with variable completely commutative coefficients. This equation corresponds in algebra $K^{m\times m}$ to the matrix algebraic differential equation of the first order. Under some conditions on the eigenvalues of matrix coefficients the general solution of the equation under consideration is obtained in the algebra $K_0^{m\times m}$ of matrix sequences.

Key words: discrete equations; difference equations; matrix equations; discrete operational calculus; sequence; hypersequence.

Няхай K – алгебра гіперпаслядоўнасцей [1] над $\mathbb{C}$ выгляду $x=\sum_{k=-r}^{\infty}x_kh^k=\left\{\dots,0,\dots,0,x_{-r},\dots,\underline{x_0},x_1,\dots\right\}$, дзе $x_k\in\mathbb{C}$, r – любы натуральны лік (падкрэслены элемент стаіць на нулявым месцы), $h^k=\left\{\dots,0,\dots,0,\underset{k}{1},0,\dots,0,\dots\right\}$, з множаннем у выглядзе дыскрэтнай згорткі Фур'е. Падмноства K_0 элементаў выгляду $x=\sum_{k=0}^{\infty}x_kh^k$ утварае алгебру паслядоўнасцей з множаннем у выглядзе дыскрэтнай згорткі Лапласа [1].

$K^{m\times m}$ – алгебра $(m\times m)$-матрыц з элементамі з K. Матрыцы з $K^{m\times m}$ уяўляюцца ў выглядзе фармальных ступеневых шэрагаў $A=\sum_{k=-r}^{\infty}A_kh^k$, $A_k\in\mathbb{C}^{m\times m}$. Заўважым, што тут маецца на ўвазе зручны спосаб запісу і пытанне збежнасці не паўстае.

Па аналогіі з [2] жарданавай клеткай $J_{m_i}(\lambda_i)$ з $K^{m_i\times m_i}$ назавём $(m_i\times m_i)$-матрыцу, якая мае выгляд

$$J_{m_i}(\lambda_i)=\begin{bmatrix}\lambda_i & I & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \lambda_i & I & \cdots & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & I\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_i\end{bmatrix},$$

дзе $\lambda_i=\sum_{k=-r}^{\infty}\lambda_{ki}h^k\in K$, $I=h^0=\{\dots,0,\underline{1},0,\dots\}$. Жарданавай матрыцай $J\in K^{m\times m}$ назавём квазідыяганальную матрыцу

$$J=\operatorname{diag}\left\{J_{m_1}(\lambda_1),\dots,J_{m_l}(\lambda_l)\right\},\text{ дзе } m_1+\dots+m_l=m. \qquad (1)$$

Азначэнне 1. Матрыца $A=\sum_{k=-r}^{\infty}A_kh^k\in K^{m\times m}$ завецца цалкам камутатыўнай (ц. к. м.), калі $\forall i,j$ $A_iA_j=A_jA_i$.

Азначэнне 2. Матрыцы $A,B\in K^{m\times m}$ завуцца $\mathbb{C}$-падобнымі, калі $T\in\mathbb{C}^{m\times m}$ такая, што $TAT^{-1}=B$. Пазначэнне: $A\underset{\mathbb{C}}{\simeq}B$.

Тэарэма 1. *Жарданава матрыца з $K^{m\times m}$ цалкам камутатыўна.*

Доказ. ► Відавочна, жарданава клетка $J_{m_i}(\lambda_i)$ – (ц. к. м.). Сцверджанне тэарэмы вынікае з выяўлення (1). ◄

Адсюль вынікаюць наступныя сцверджанні:

1) няхай A – ц. к. м., $A\underset{\mathbb{C}}{\simeq}B$. Тады B – ц. к. м.

2) калі $A\underset{\mathbb{C}}{\simeq}J$, дзе J – жарданава, то A – ц. к. м.

Характарыстычны мнагасклад для матрыцы $A \in K^{m\times m}$ азначым, як звычайна, $f_A(\lambda) = \det(A - \lambda E)$. Ягоныя карані λ назавём уласнымі значэннямі. Мае месца

Тэарэма 2. *Няхай $A \in K^{m\times m}$ – ц. к. м., тады:*

1) характарыстычны мнагасклад $f_A(\lambda) = \det(A - \lambda E)$ прыводны над K;

2) $A \underset{\mathbb{C}}{\simeq} \Lambda$, дзе $\Lambda \in K^{m\times m}$ – трохвугольная.

Д о к а з. ► Маем $A = \sum\limits_{k=-r}^{\infty} A_k h^k$, $A_i A_j = A_j A_i$. Будуем функцыянальна-камутатыўную матрыцу $A(t)$ такую, што $A(k) = A_k$. З тэарэмы У. У. Марозава [3] вынікае, што ўсе матрыцы A_k могуць быць прыведзены да трохвугольнага выгляду адным сталым пераўтварэннем падабенства, адкуль і вынікае сцверджанне тэарэмы. ◄

Заўвага 1. Тэарэму 2 нельга перафармуляваць на мове неабходных і дастатковых умоў, бо, увогуле кажучы, трохвугольная матрыца з $K^{m\times m}$ не з'яўляецца $\mathbb{C}$-падобнай жарданавай.

Заўвага 2. Калі ў тэарэме 2 $A \in K_0^{m\times m}$, то яе ўласныя значэнні належаць да K_0.

Азначым у $K^{m\times m}$ алгебраічныя дыферэнцаванне і інтэграванне формуламі

$$DA = \sum_{k=-r}^{\infty} k A_k h^{k-1}; \ \int A = \sum_{k=-r}^{\infty} \frac{1}{k+1} A_k h^{k+1},$$

пры гэтым інтэграл вызначаны толькі, калі $A_{-1} = O$.

Аналітычная функцыя ад матрыцы з $K^{m\times m}$ у агульным выпадку не азначаецца. Калі ўсе ўласныя значэнні λ_i матрыцы A належаць да K_0, паступім наступным чынам. Функцыі ад жарданавых клетак азначым, як у [2, с. 87]:

$$f\left(J_{m_i}\left(\lambda_i\right)\right) = \begin{bmatrix} f\left(\lambda_i\right) & \dfrac{f'\left(\lambda_i\right)}{1!} & \cdots & \dfrac{f^{[m_i-1]}\left(\lambda_i\right)}{\left(m_i-1\right)!} \\ 0 & f\left(\lambda_i\right) & \cdots & \dfrac{f^{[m_i-2]}\left(\lambda_i\right)}{\left(m_i-2\right)!} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & f\left(\lambda_i\right) \end{bmatrix}.$$ Для жарданавых матрыц маем

$$f(J) = \operatorname{diag}\left\{ f\left(J_{m_1}\left(\lambda_1\right)\right), \ldots, f\left(J_{m_l}\left(\lambda_l\right)\right) \right\}.$$

Калі $A = T^{-1} J T$, дзе $T \in K^{m\times m}$, J – жарданава, то $f(A) = T^{-1} f(J) T$.

Такім чынам, для вызначэння $f(A)$ неабходна і дастаткова вызначыць f на ўласных значэннях λ_i. Для $\lambda_i = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \lambda_{ki} h^k \in K_0$ гэта зроблена ў [1] пры ўмовах $\overline{\lim\limits_{k\to\infty}} \sqrt[k]{\left|\lambda_{ki}\right|} \neq \infty \ \ \forall i$.

Ніжэй гэтыя ўмовы будзем лічыць выкананымі ва ўсіх выпадках, калі разглядаюцца функцыі ад матрыц з $K^{m\times m}$. Напрыклад, калі $\det\left(A - \lambda_i E\right) = 0$, то $e^{\lambda_i} = I + \dfrac{\lambda_i}{1!} + \dfrac{\lambda_i^2}{2!} + \cdots + \dfrac{\lambda_i^n}{n!} + \cdots$ і $\exp A$ можна выявіць у форме $e^A = E + \dfrac{A}{1!} + \dfrac{A^2}{2!} + \cdots + \dfrac{A^n}{n!} + \cdots$.

Калі $A \in \mathbb{C}^{m\times m}$ мае простую структуру і $TAT^{-1} = \operatorname{diag}\{\lambda_1, \ldots, \lambda_m\}$, дзе $T \in \mathbb{C}^{m\times m}$, $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \geq 0$ – цэлыя, не абавязкова розныя, тады $h^A = T^{-1} \operatorname{diag}\left\{h^{\lambda_1}, \ldots, h^{\lambda_m}\right\} T$. Надалей для спрашчэння запісу ў выпадку неабходнасці будзем атаясамліваць матрыцу $A \in \mathbb{C}^{m\times m}$ з элементам $AI \in K^{m\times m}$.

Няхай A – ц. к. м. З вышэйпрыведзенага вынікаюць наступныя ўласцівасці:

1) DA, $\int A$ – ц. к. м.;

2) $A(DA) = (DA)A$, $A\left(\int A\right) = \left(\int A\right)A$;

3) f – аналітычная функцыя $\Rightarrow$ $f(A)$ – ц. к. м.;

4) $D\left(f(A)\right) = f'(A) DA$;

5) $D\left(\exp(A)\right) = \exp(A) DA = (DA)\exp A$

пры ўмовах, што $f(A)$ вызначана. Адсюль вынікае

Тэарэма 3. *Няхай $A \in K^{m\times m}$ – ц. к. м. і вызначаны $\int A$, $\exp\left(\int A\right)$. Тады агульны развязак у $K^{m\times m}$ матрычнага алгебраічнага дыферэнцыяльнага раўнання*

$$DX = AX$$

мае выгляд

$$X = e^{\left(\int A\right)} C, \qquad (2)$$

дзе $C \in \mathbb{C}^{m\times m}$ *– адвольная матрыца.*

Доказ атрымліваецца непасрэдным дыферэнцаваннем з улікам вышэйпрыведзеных уласцівасцей.

У прыватнасці, калі $A = \left(h + ME\right)^{-1} B$, дзе $M, B \in \mathbb{C}^{m\times m}$ такія, што $MB = BM$, то $X = \left(h + ME\right)^{B} C = M^{B} \left(E + M^{-1} h\right)^{B} C$, дзе матрыца M^{B} вызначаецца, як у [2], $\left(E + M^{-1}h\right)^{B} = E + BM^{-1}h + \cdots + \frac{1}{k!} B\left(B - E\right)\cdots\left(B - \left(k-1\right)E\right)\left(M^{-1}h\right)^{k} + \cdots$.

Разгледзім матрычнае рознаснае раўнанне I парадку

$$\left(An + B\right)X_{n+1} + \left(Mn + L\right)X_n = \mathrm{O}, \; n = 0,1,\ldots, \qquad (3)$$

дзе A, B, M, L – папарна камутуючыя матрыцы з $\mathbb{C}^{m\times m}$, $\left\{X_n\right\}_{n=0}^{\infty} \in K_0^{m\times m}$ – невядомая матрыца-паслядоўнасць. Зададзім пачатковую ўмову $X_0 = \mathrm{O} = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$.

Пры гэтых умовах раўнанне (3) тым жа самым чынам, што і ў [1], прыводзіцца да аднароднага матрычнага дыферэнцыйнага раўнання ў алгебры $K^{m\times m}$

$$DX = \left(A + Mh\right)^{-1} h^{-1} \left(A - B - Lh\right) X, \qquad (4)$$

у якога каэфіцыент пры X у правай частцы – ц. к. м.

Заўважым, што раўнанне (3) з ненулявымі пачатковымі ўмовамі ці ненулявой правай часткай прыводзіцца да неаднароднага раўнання выгляду (4), даследаванне якога выходзіць за рамкі дадзенага артыкула.

Разгледзім выпадак $M = \mathrm{O}$, $\exists A^{-1}$. З (4) атрымаем раўнанне

$$DX = h^{-1}\left(E - A^{-1}B - A^{-1}Lh\right)X.$$

Непасрэднай праверкай можна ўпэўніцца, што матрыца

$$X = h^{E - A^{-1}B}\left(\exp\left(-A^{-1}Lh\right)\right)C \qquad (5)$$

задавальняе гэта раўнанне пры ўмовах, што ўсе функцыі, якія ўваходзяць у яго, вызначаны.

Высветлім, у якіх выпадках (5) дае шуканы развязак раўнання (3). Для любых матрыц A, L

$$\exp\left(-A^{-1}Lh\right) = \left(E - A^{-1}Lh + \frac{1}{2!}\left(A^{-1}Lh\right)^2 + \cdots\right)$$

ёсць матрычная паслядоўнасць з $K_0^{m\times m}$.

Няхай матрыца $\left(E - A^{-1}B\right)$ мае простую структуру і $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ – яе ўласныя значэнні (не абавязкова розныя). Тады $\exists T \in \mathbb{C}^{m\times m}$ такая, што

$$T\left(E - A^{-1}B\right)T^{-1} = \mathrm{diag}\left\{\alpha_1, \ldots, \alpha_m\right\},$$

$$\text{і } h^{E - A^{-1}B} = T^{-1}\mathrm{diag}\left\{h^{\alpha_1}, \ldots, h^{\alpha_m}\right\}T.$$

Калі $\alpha_k \ge 1$ – цэлыя, $k = \overline{1, n}$, тады X з (5) – матрыца-паслядоўнасць выгляду $X = h\tilde{X}$, дзе $\tilde{X} \in K_0^{m\times m}$ і $X_0 = \mathrm{O}$. Пры іншых α_k ці калі матрыца $\left(E - A^{-1}B\right)$ не мае простай структуры, матрыца (5) не дае развязак раўнання (3) у $K_0^{m\times m}$, бо ў гэтай алгебры не вызначаны $\ln h$ і h^{α}, калі $\alpha \notin \mathbb{N}_0$. Калі $\exists j : \alpha_j = 0$, маем $X_0 \ne \mathrm{O}$.

Разгледзім выпадак $M \ne \mathrm{O}$, $\exists A^{-1}M^{-1}$. Непасрэднай падстаноўкай можна ўпэўніцца ў тым, што матрыца

$$X = h^{E - A^{-1}B}\left(E + A^{-1}Mh\right)^{A^{-1}B - M^{-1}L - E} C = h^{E - A^{-1}B}\exp\left(\left(A^{-1}B - M^{-1}L - E\right)\ln\left(E + A^{-1}Mh\right)\right)C, \qquad (6)$$

дзе $C \in \mathbb{C}^{m\times m}$ – адвольная, задавальняе раўнанне (4).

Пазначым $P = A^{-1}B - M^{-1}L - E$. Для любых перастаўляльных матрыц A, B, M, L матрыца $\left(E + A^{-1}Mh\right)^{A^{-1}B - M^{-1}L - E} = \left(E + A^{-1}Mh\right)^{P} = E + \frac{1}{1!}P\left(A^{-1}M\right)h + \frac{1}{2!}P(P - E)\left(A^{-1}Mh\right)^2 + \cdots + \frac{1}{k!}P(P - E)\cdots$

$\cdots\left(P-(k-1)E\right)\left(A^{-1}Mh\right)^{k}+\cdots=E+\sum_{k=0}^{\infty}V_k h^k$ ёсць матрыца-паслядоўнасць з $K_0^{m\times m}$. Тады з (6)

$$X=h^{E-A^{-1}B}\left(E+\sum_{k=0}^{\infty}V_k h^k\right)C,$$

адкуль вынікае, што (6) дае агульны развязак раўнання (3) у алгебры $K_0^{m\times m}$ з пачатковым значэннем $X_0=\mathrm{O}$ пры тых жа абмежаваннях, што і ў (5).

Заўважым, што развязкі (5) і (6) не атрымліваюцца як прыватныя выпадкі з формулы (2), таму што інтэграл пад знакам экспаненты не вызначаны. Аднак жа развязкі (5) і (6) вызначаны, паколькі з тэарэмы 2 вынікае, што ўласныя значэнні адпаведных матрыц належаць да K_0, а магчымасць дыферэнцавання вынікае з уласцівасцей ц. к. м.

Развязак (6) можа быць прадстаўлены ў больш зручнай форме. Пазначым $\Omega=\left(A^{-1}B-M^{-1}L-E\right)\ln\left(E+A^{-1}Mh\right)$.

З нагоды перастаўляльнасці матрыц, якія ўваходзяць у Ω, $\exists U\in\mathbb{C}^{m\times m}$ такая, што

$$U\left(A^{-1}B-M^{-1}L-E\right)U^{-1}=\begin{bmatrix}\mu_1 & - & - & -\\ 0 & \mu_2 & - & -\\ \cdots & \cdots & - & -\\ 0 & 0 & \cdots & \mu_m\end{bmatrix},\ U\left(A^{-1}M\right)U^{-1}=\begin{bmatrix}\nu_1 & - & - & -\\ 0 & \nu_2 & - & -\\ \cdots & \cdots & - & -\\ 0 & 0 & \cdots & \nu_m\end{bmatrix}. \tag{7}$$

Тут у правай частцы стаяць верхнетрохвугольныя матрыцы з уласнымі значэннямі (не абавязкова living рознымі) адпаведна $\mu_1,\ldots,\mu_m$ і $\nu_1,\ldots,\nu_m$. Адсюль вынікае, што ўласныя значэнні матрыцы Ω маюць выгляд $\mu_i\ln\left(I+\nu_i h\right)$, дзе множнікі бяруцца ў тым жа парадку, што і ў (7).

Няхай $\Omega=J_{m_i}=\begin{bmatrix}\mu_i\ln\left(I+\nu_i h\right) & I & 0 & 0\\ 0 & \mu_i\ln\left(I+\nu_i h\right) & I & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & \cdots & \mu_i\ln\left(I+\nu_i h\right)\end{bmatrix}$. Карыстаючыся формулай з крыніцы [2, с. 87] для вылічэння функцый ад жарданавых матрыц, атрымаем

$$e^{\Omega}=e^{J_{m_i}}=\left(I+\nu_i h\right)^{\mu_i}\begin{bmatrix}1 & \frac{1}{1!} & \cdots & \frac{1}{\left(m_i-1\right)!}\\ 0 & 1 & \cdots & \frac{1}{\left(m_i-2\right)!}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & \cdots & 1\end{bmatrix}.$$

У агульным выпадку існуе матрыца $W\in K^{m\times m}$ такая, што $W\Omega W^{-1}=J=\operatorname{diag}\left\{J_{m_1},\ldots,J_{m_l}\right\}$ – жарданава матрыца над $K_0^{m\times m}$, $m_1+\cdots+m_l=m$. Тады

$$e^{\Omega}=W^{-1}e^{J}W=W^{-1}\operatorname{diag}\left\{e^{J_{m_1}},\ldots,e^{J_{m_l}}\right\}W$$

і (6) можна запісаць у выглядзе

$$X=h^{E-A^{-1}B}W^{-1}\operatorname{diag}\left\{e^{J_{m_1}},\ldots,e^{J_{m_l}}\right\}WC.$$

Усё вышэйсказанае абагульняе

Тэарэма 4. *Няхай $\exists A^{-1}$, матрыца $\left(E-A^{-1}B\right)$ мае простую структуру і яе ўласныя значэнні $\alpha_1,\ldots,\alpha_m$ – натуральныя. Тады матрыцы* (5) *і* (6) *даюць агульны развязак раўнання* (3) *з нулявой пачатковай умовай у алгебры $K_0^{m\times m}$ у выпадках $M=\mathrm{O}$ і $\exists M^{-1}$ адпаведна.*

Заўвага 3. Калі існуе прынамсі адно натуральнае ўласнае значэнне α_j матрыцы $\left(E-A^{-1}B\right)$, раўнанне (3) можа мець нетрывіяльны развязак, які не задаецца формулай (5) ці (6). Разгляд такіх развязкаў (так званых асобых) не ўваходзіць у межы дадзенага артыкула.

Аўтары ўдзячны прафесару А. Б. Антаневічу за каштоўныя заўвагі, якія былі ўлічаны пры падрыхтоўцы артыкула.

БІБЛІЯГРАФІЧНЫ СПІС

1. Васільеў І. Л., Навічкова Д. А. Рашэнне дыскрэтнага раўнання Лапласа ў кольцы паслядоўнасцей // Вестн. БГУ. Сер. 1. 2010. № 3. С. 114–119.

2. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц // ГИТТЛ. М., 1954. С. 87.

3. Морозов В. В. О коммутативных матрицах // Сб. работ НИИ математики и механики им. Н. Г. Чеботарева; Учен. зап. Казан. гос. ун-та. Т. 112, вып. 9. Казань, 1952. С. 17–20.

Пастуліў у рэдакцыю 22.05.13.

Ігар Леанідавіч Васільеў – кандыдат фізіка-матэматычных навук, дацэнт кафедры тэорыі функцый.

Дар'я Аляксандраўна Навічкова – аспірант кафедры тэорыі функцый. Навуковы кіраўнік – І. Л. Васільеў.