УДК 539.3

В. В. КОРОЛЕВИЧ (ЧЕХИЯ), Д. Г. МЕДВЕДЕВ

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ВОЛЬТЕРРА 2-го РОДА В ЗАДАЧАХ ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ КОЛЕБАНИЙ ПОЛЯРНО-ОРТОТРОПНЫХ КОЛЬЦЕВЫХ ПЛАСТИН ПЕРЕМЕННОЙ ТОЛЩИНЫ, СКРЕПЛЕННЫХ С УПРУГИМ ОСНОВАНИЕМ ПАСТЕРНАКА

С помощью линейных интегральных уравнений Вольтерра 2-го рода решаются в общем виде задачи вынужденных нерезонансных осесимметричных колебаний полярно-ортотропных кольцевых пластин переменной толщины, скрепленных с упругим основанием Пастернака. Методом последовательных приближений даны решения интегральных уравнений. Приводятся расчетные формулы для изгибающих моментов, поперечного усилия и функции прогиба, а также формулы расчета динамических напряжений в пластине. В случае нулевой поперечной нагрузки имеем задачу расчета спектра частот свободных колебаний анизотропных кольцевых пластин.

Ключевые слова: анизотропия; полярно-ортотропная пластина; ортогональные плоскости; меридиональное сечение; дифференциальные и интегральные уравнения; итерационный процесс.

With the help of linear Volterra integral equations of the 2-nd kind the forced non-resonant axisymmetric vibrations problems of polar-orthotropic annular plates of variable thickness, fastened with elastic Pasternak base, are solved in general. The solutions of this equations are obtained by the method of successive approximations. The formulas for bending moments, shear force and functions of bending and the formulas for the calculation of dynamic stresses in a plate are provided. In the case of zero transverse load we have a problem of calculation of the spectrum of frequencies of free vibrations of anisotropic annular plates.

Key words: anisotropy; polar-orthotropic plate; orthogonal planes; meridian section; differential and integral equations; iteration process.

В работе с помощью интегральных уравнений Вольтерра 2-го рода решается задача вынужденных нерезонансных осесимметричных малых изгибных колебаний тонких полярно-ортотропных кольцевых пластин переменной толщины, скрепленных с упругим основанием Пастернака. Кольцевая пластина изготовлена из цилиндрически-ортотропного материала, причем ось анизотропии совпадает с геометрической осью пластины, и в каждой точке тела имеются три взаимно ортогональные плоскости упругой симметрии. Внутренний радиус кольцевой пластины обозначим r_0, а внешний – R. Толщина $h(r)$ пластины изменяется вдоль радиуса r по заданному закону и на внутреннем контуре равна h_0.

Приложенная на пластину изгибающая нагрузка в общем случае может состоять из поверхностных и объемных нагрузок, нормальных к срединной поверхности пластины, и нагрузок, распределенных по краям пластины, в виде краевых изгибающих моментов и поперечных сил.

Введем цилиндрическую систему координат $r, \theta, z,$ поместив начало в точке пересечения оси анизотропии со срединной плоскостью пластины.

Расчет кольцевой пластины будем проводить в рамках классической теории изгиба тонких пластин, основанной на гипотезах Кирхгофа.

Обозначим перемещения точек срединной поверхности пластины в направлении оси z через $w(r,t)$, которую будем называть ниже *функцией прогиба*.

Связь между реакцией $q_r(r,t)$ упругого основания и функцией прогиба $w(r,t)$ примем в соответствии с моделью Пастернака в виде [1, 2]

$$q_r(r,t) = k_0 w(r,t) - k_1 \Delta w(r,t) + m_f \ddot{w}(r,t),$$

где k_0 – коэффициент сопротивления сжатию упругого основания; k_1 – коэффициент сопротивления сдвигу упругого основания; m_f – массовый коэффициент упругого основания; Δ – оператор Лапласа в цилиндрических координатах;

$$\Delta w(r,t) = \left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} \right).$$

Если коэффициент $k_1 = 0,$ то имеем упругое основание Винклера.

Выведем дифференциальное уравнение малых изгибных колебаний полярно-ортотропной кольцевой пластины переменной толщины, скрепленной с упругим основанием Пастернака и находящейся под воздействием внешней осесимметрично распределенной и переменной во времени поперечной нагрузки $q_z(r,t)$.

Выделим из пластины двумя меридиональными плоскостями, образующими с координатной плоскостью rz углы θ и $\theta + d\theta$, и двумя цилиндрическими поверхностями радиусом r и $r+dr$, нормальными к срединной плоскости, бесконечно малый элемент пластины. Запишем уравнения движения этого элемента в усилиях и моментах:

$$\frac{\partial}{\partial r}(rQ_r) + r\left(q_z(r,t) - q_r(r,t)\right) = \rho h(r) r \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \tag{1}$$

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(rM_r\right)-M_\theta-rQ_r=0,$$

где $M_r(r,t), Q_r(r,t)$ – соответственно изгибающий момент и поперечное усилие, действующие в цилиндрическом сечении; $M_\theta(r,t)$ – изгибающий момент, действующий в радиальном сечении кольцевой пластины; ρ – плотность материала пластины.

Выразим из второго уравнения системы (1) поперечное усилие $Q_r(r,t)$ через изгибающие моменты $M_r\left(r,t\right), M_\theta\left(r,t\right)$:

$$Q_r(r,t)=\frac{1}{r}\left(\frac{\partial(rM_r)}{\partial r}-M_\theta\right). \tag{2}$$

Подстановка в первое уравнение системы (1) вместо Q_r правой части выражения (2) приводит к следующему уравнению:

$$\frac{\partial^2 M_r}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial M_r}{\partial r}-\frac{1}{r}\frac{\partial M_\theta}{\partial r}+k_1\left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r}\right)-k_0 w-m_f\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}+q_z\left(r,t\right)=\rho h\left(r\right)\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}. \tag{3}$$

Изгибающие моменты $M_r(r,t), M_\theta(r,t)$ и поперечное усилие $Q_r(r,t)$ связаны с функцией прогиба $w(r,t)$ следующими зависимостями [3]:

$$M_r(r,t)=-D_{11}(r)\left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}+\frac{\nu_{\theta r}}{r}\frac{\partial w}{\partial r}\right),\qquad M_\theta(r,t)=-D_{11}(r)\left(\nu_{\theta r}\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}+\frac{k^2}{r}\frac{\partial w}{\partial r}\right), \tag{4}$$

$$Q_r(r,t)=-D_{11}(r)\left[\left(\frac{\partial^3 w}{\partial r^3}+\frac{1}{r}\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}-\frac{k^2}{r^2}\frac{\partial w}{\partial r}\right)+\frac{D_{11}'}{D_{11}}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}+\frac{\nu_{\theta r}}{r}\frac{\partial w}{\partial r}\right)\right],$$

где $D_{11}(r)=\dfrac{E_\theta h^3(r)}{12\left(k^2-\nu_{\theta r}^2\right)}$ – цилиндрическая жесткость изгиба полярно-ортотропной пластины; $k^2=\dfrac{E_\theta}{E_r}$, E_θ, E_r – модули Юнга для растяжения-сжатия тела в направлении осей θ и r соответственно; $\nu_{\theta r}$ – коэффициент Пуассона.

Для полярно-ортотропного тела справедливо соотношение: $\dfrac{\nu_{r\theta}}{E_r}=\dfrac{\nu_{\theta r}}{E_\theta}$.

Подставляя выражения для моментов $M_r(r,t), M_\theta(r,t)$ из (4) в уравнение (3), получим ***основное дифференциальное уравнение осесимметричных малых изгибных колебаний полярно-ортотропных кольцевых пластин переменной толщины, скрепленных с упругим основанием Пастернака:***

$$\frac{\partial^4 w}{\partial r^4}+2\left(\frac{D_{11}'}{D_{11}}+\frac{1}{r}\right)\frac{\partial^3 w}{\partial r^3}+\left[\frac{D_{11}''}{D_{11}}+\frac{\left(2+\nu_{\theta r}\right)}{r}\frac{D_{11}'}{D_{11}}-\frac{k_1}{D_{11}}-\frac{k^2}{r^2}\right]\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}+\left[\frac{\nu_{\theta r}}{r}\frac{D_{11}''}{D_{11}}-\frac{k^2}{r^2}\frac{D_{11}'}{D_{11}}-\right.$$

$$\left.-\frac{k_1}{rD_{11}}+\frac{k^2}{r^3}\right]\frac{\partial w}{\partial r}+\frac{k_0}{D_{11}(r)}w+\frac{\left[m_f+\rho h(r)\right]}{D_{11}(r)}\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=\frac{q_z(r,t)}{D_{11}(r)}. \tag{5}$$

Пусть изгибающая нагрузка $q_z(r,t)$ изменяется во времени по гармоническому закону с частотой Ω, не совпадающей ни с одной из собственных частот колебаний пластины («нерезонансный случай»):

$$q_z(r,t)=q_0(r)\sin\Omega t, \tag{6}$$

вследствие чего кольцевая пластина будет испытывать *вынужденные нерезонансные осесимметричные изгибные колебания.* Тогда функцию прогиба $w(r,t)$ можно представить в виде

$$w(r,t)=W_0(r)\sin\Omega t\,. \tag{7}$$

Подстановка выражений (6) и (7) в уравнение (5) дает неоднородное обыкновенное дифференциальное уравнение 4-го порядка для амплитуды $W_0\left(r\right)$ вынужденных нерезонансных осесимметричных изгибных колебаний полярно-ортотропной кольцевой пластины переменной толщины, скрепленной с упругим основанием Пастернака:

$$\frac{d^4W_0}{dr^4}+2\left(\frac{D'_{11}}{D_{11}}+\frac{1}{r}\right)\frac{d^3W_0}{dr^3}+\left[\frac{D''}{D_{11}}+\frac{\left(2+\nu_{\theta r}\right)}{r}\frac{D'_{11}}{D_{11}}-\frac{k_1}{D_{11}}-\frac{k^2}{r^2}\right]\frac{d^2W_0}{dr^2}+\left[\frac{\nu_{\theta r}}{r}\frac{D''_{11}}{D_{11}}-\frac{k^2}{r^2}\frac{D'_{11}}{D_{11}}-\right.$$

$$\left.-\frac{k_1}{rD_{11}}+\frac{k^2}{r^3}\right]\frac{dW_0}{dr}+\left[\frac{k_0-\left(m_f+\rho h(r)\right)\Omega^2}{D_{11}(r)}\right]W_0=\frac{q_0(r)}{D_{11}(r)}. \tag{8}$$

Запишем уравнение (8) в виде

$$\frac{d^4W_0}{dr^4}+a_1(r)\frac{d^3W_0}{dr^3}+a_2(r)\frac{d^2W_0}{dr^2}+2a_3(r)\frac{dW_0}{dr}+6a_4(r)W_n^{(i)}=\frac{q_0(r)}{D_{11}(r)}, \tag{9}$$

где $a_1(r)=2\left(\frac{D'_{11}}{D_{11}}+\frac{1}{r}\right)$, $a_2(r)=\left[\frac{D''_{11}}{D_{11}}+\frac{\left(2+\nu_{\theta r}\right)}{r}\frac{D'_{11}}{D_{11}}-\frac{k_1}{D_{11}}-\frac{k^2}{r^2}\right]$,

$$a_3(r)=\frac{1}{2}\left[\frac{\nu_{\theta r}}{r}\frac{D''_{11}}{D_{11}}-\frac{k^2}{r^2}\frac{D'_{11}}{D_{11}}-\frac{k_1}{rD_{11}}+\frac{k^2}{r^3}\right],\ a_4(r)=\left[\frac{k_0-\left(m_f+\rho h(r)\right)\Omega^2}{6D_{11}(r)}\right].$$

Сведем задачу решения дифференциального уравнения (9) к решению соответствующего линейного интегрального уравнения Вольтерра 2-го рода. Полагаем

$$\frac{d^4W_0}{dr^4}=Z(r). \tag{10}$$

Последовательно интегрируя выражение (10), получим

$$\frac{d^3W_0}{dr^3}=\int_{r_0}^{r}Z(s)ds+\dddot{W}_0(r_0),$$

$$\frac{d^2W_0}{dr^2}=\int_{r_0}^{r}(r-s)Z(s)ds+\dddot{W}_0(r_0)(r-r_0)+\ddot{W}_0(r_0), \tag{11}$$

$$\frac{dW_0}{dr}=\frac{1}{2}\int_{r_0}^{r}(r-s)^2Z(s)ds+\frac{1}{2}\dddot{W}_0(r_0)(r-r_0)^2+\ddot{W}_0(r_0)(r-r_0)+\dot{W}_0(r_0),$$

$$W_0(r)=\frac{1}{6}\int_{r_0}^{r}(r-s)^3Z(s)ds+\frac{1}{6}\dddot{W}_0(r_0)(r-r_0)^3+\frac{1}{2}\ddot{W}_0(r_0)(r-r_0)^2+\dot{W}_0(r_0)(r-r_0)+W_0(r_0).$$

Здесь использовалось известное тождество Дирихле [4]:

$$\underbrace{\int_{r_0}^{r}dr_1\int_{r_0}^{r_1}dr_2...\int_{r_0}^{r_{n-1}}f(r_n)dr_n}_{n\,раз}=\frac{1}{(n-1)!}\int_{r_0}^{r}(r-s)^{n-1}f(s)ds.$$

Подставив в уравнение (9) вместо функции $W_0(r)$ и ее производных правые части выражений (10) и (11), получим искомое интегральное уравнение Вольтерра 2-го рода:

$$Z(r)=\lambda\int_{r_0}^{r}K_0(r,s)Z(s)ds+f_0(r), \tag{12}$$

где числовой параметр $\lambda=-1$; $K_0(r,s)=\left[a_1(r)+a_2(r)(r-s)+a_3(r)(r-s)^2+\ a_4(r)(r-s)^3\right]$ – ядро интегрального уравнения; $f_0(r)$ – свободный член интегрального уравнения, имеющий вид

$$f_0(r)=\frac{\partial^3K_0(r,r_0)}{\partial s^3}W_0(r_0)-\frac{\partial^2K_0(r,r_0)}{\partial s^2}\dot{W}_0(r_0)+\frac{\partial K_0(r,r_0)}{\partial s}\ddot{W}_0(r_0)-K_0(r,r_0)\dddot{W}_0(r_0)+\frac{q_0(r)}{D_{11}(r)}.$$

Здесь введены обозначения $\frac{\partial^lK_0(r,r_0)}{\partial s^l}=\frac{\partial^lK_0(r,s)}{\partial s^l}\Big|_{s=r_0}$ (l = 1, 2, 3).

Общее решение интегрального уравнения Вольтерра 2-го рода (12) получим *методом последовательных приближений* [4]:

$$Z_n(r) = \lambda \int_{r_0}^{r} K_0(r,s) Z_{n-1}(s) ds + f_0(r),$$

где индекс n означает номер итерации.

В качестве нулевого приближения примем: $Z_0(r) = 0$.

Если свободный член $f_0(r)$ непрерывен в $[r_0, R]$, а ядро $K_0(r,s)$ непрерывно при $r_0 \le r \le R$, $r_0 \le s \le r$, то последовательность $\{Z_n(r)\}$ сходится при $n \to \infty$ к решению $Z(r)$ интегрального уравнения (12):

$$Z(r) = \lim_{n \to \infty} Z_n(r).$$

Оценки сходимости итерационного процесса при решении интегрального уравнения Вольтерра 2-го рода методом последовательных приближений нами подробно были рассмотрены в работе [5].

Отметим, что интегральные уравнения Вольтерра 2-го рода можно решать и другими аналитическими и численными методами, приведенными в работе [6].

Выразим изгибающие моменты $M_r(r,t), M_\theta(r,t)$ и поперечное усилие $Q_r(r,t)$ через разрешающую функцию $Z(r)$:

$$M_r(r,t) = -D_{11}(r)\left[\int_{r_0}^{r} K_{M_r}^{(0)}(r,s) Z(s) ds + K_{M_r}^{(0)}(r,r_0)\dddot{W}_0(r_0) - \frac{\partial K_{M_r}^{(0)}(r,r_0)}{\partial s}\ddot{W}_0(r_0) + \right.$$
$$\left. + \frac{\partial^2 K_{M_r}^{(0)}(r,r_0)}{\partial s^2}\dot{W}_0(r_0)\right]\sin\Omega t,$$

$$M_\theta(r,t) = -D_{11}(r)\left[\int_{r_0}^{r} K_{M_\theta}^{(0)}(r,s) Z(s) ds + K_{M_\theta}^{(0)}(r,r_0)\dddot{W}_0(r_0) - \frac{\partial K_{M_\theta}^{(0)}(r,r_0)}{\partial s}\ddot{W}_0(r_0) + \right.$$
$$\left. + \frac{\partial^2 K_{M_\theta}^{(0)}(r,r_0)}{\partial s^2}\dot{W}_0(r_0)\right]\sin\Omega t,$$

$$Q_r(r,t) = -D_{11}(r)\left[\int_{r_0}^{r} K_{Q_r}^{(0)}(r,s) Z(s) ds + K_{Q_r}^{(0)}(r,r_0)\dddot{W}_0(r_0) - \frac{\partial K_{Q_r}^{(0)}(r,r_0)}{\partial s}\ddot{W}_0(r_0) + \right.$$
$$\left. + \frac{\partial^2 K_{Q_r}^{(0)}(r,r_0)}{\partial s^2}\dot{W}_0(r_0)\right]\sin\Omega t,$$

где передаточные (весовые) функции имеют вид

$$K_{M_r}^{(0)}(r,s) = \left[1 + \nu_{\theta r}\frac{(r-s)}{2r}\right](r-s), \quad K_{M_\theta}^{(0)}(r,s) = \left[\nu_{\theta r} + k^2\frac{(r-s)}{2r}\right](r-s),$$

$$K_{Q_r}^{(0)}(r,s) = \left[1 + \left(\frac{D'_{11}}{D_{11}} + \frac{1}{r}\right)(r-s) + \left(\nu_{\theta r}\frac{D'_{11}}{D_{11}} - \frac{k^2}{r}\right)\frac{(r-s)^2}{2r}\right].$$

Постоянные величины $W_0(r_0), \dot{W}_0(r_0), \ddot{W}_0(r_0), \dddot{W}_0(r_0)$ находятся из граничных условий на контурах кольцевой пластины:

1) если какой-либо контур пластины жестко заделан или защемлен, то

$$W_0(r_i) = 0, \quad \dot{W}_0(r_i) = 0 \qquad (i = 1, 2),$$

где $r_1 = r_0$, $r_2 = R$;

2) для шарнирно опертого края пластины

$$W_0(r_i) = 0, \quad M_r(r_i, t) = 0;$$

3) для свободного края кольцевой пластины

$$M_r(r_i,t)=0,\quad Q_r(r_i,t)=0.$$

Удовлетворяя найденное решение интегрального уравнения (12) заданным граничным условиям, можем по известным формулам рассчитать нормальные $\sigma_r^{\partial}(r,z,t),\sigma_\theta^{\partial}(r,z,t)$ и касательные $\tau_{rz}^{\partial}(r,t)$ динамические напряжения в анизотропной кольцевой профилированной пластине на упругом основании Пастернака, нагруженной периодически изменяющейся во времени распределенной поперечной нагрузкой $q_z(r,t)$:

$$\sigma_r^{\partial}(r,z,t)=z\frac{12M_r(r,t)}{h^3(r)},\quad \sigma_\theta^{\partial}(r,z,t)=z\frac{12M_\theta(r,t)}{h^3(r)},\quad \tau_{rz}^{\partial}(r,t)=\frac{Q_r(r,t)}{h(r)}.$$

Максимум нормальных напряжений достигается на внешних сторонах пластины при $z=\pm\frac{h}{2}$.

В случае если поперечная нагрузка $q_z=0$, то имеем задачу расчета спектра частот *свободных колебаний* кольцевой пластины. Удовлетворяя найденное решение интегрального уравнения Вольтерра заданным граничным условиям, из условия равенства нулю определителя, составленного из стоящих при постоянных интегрирования значений функций в граничных точках, получим *частотное уравнение*, которое решается аналитическими или численными методами.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Власов В. З., Леонтьев Н. И. Балки, плиты, оболочки на упругом основании. М., 1960.
2. Леоненко Д. В. Собственные колебания трехслойных круговых пластин на упругом основании Пастернака: сб. материалов Междунар. науч. конф. молодых ученых «Молодежь в науке» (Минск, 17–20 апр. 2012 г.). Минск, 2012. С. 326–332.
3. Королевич В. В. Интегральные уравнения Вольтерра второго рода в задачах динамики полярно-ортотропных дисков переменной толщины // Проблемы вычислительной механики и прочности конструкций: сб. науч. тр. Днепропетров. нац. ун-та им. О. Гончара. Днепропетровск, 2012. Вып. 20. С. 192–199.
4. Краснов М. Л., Киселев А. И., Макаренко Г. И. Интегральные уравнения: задачи и примеры с подробными решениями. М., 2007.
5. Королевич В. В., Медведев Д. Г. Интегральные уравнения Вольтерра 2-го рода в задачах осесимметричного изгиба полярно-ортотропных пластин переменной толщины, скрепленных с упругим основанием Пастернака // Вестн. БГУ. Сер. 1. 2013. № 2. С. 99.
6. Верлань А. Ф., Сизиков В. С. Интегральные уравнения: методы, алгоритмы, программы: справ. пособие. Киев, 1986.

Поступила в редакцию 23.09.13.

Владимир Васильевич Королевич – преподаватель Национального педагогического университета им. М. Драгоманова (Прага, Чехия).

Дмитрий Георгиевич Медведев – кандидат физико-математических наук, доцент, декан механико-математического факультета.