УДК 539.3

В. В. КОРОЛЕВИЧ (ЧЕХИЯ), Д. Г. МЕДВЕДЕВ

НЕСИММЕТРИЧНЫЙ ИЗГИБ ПОЛЯРНО-ОРТОТРОПНЫХ КОЛЬЦЕВЫХ ПЛАСТИН ПЕРЕМЕННОЙ ТОЛЩИНЫ, СКРЕПЛЕННЫХ С УПРУГИМ ОСНОВАНИЕМ ПАСТЕРНАКА

Решается в общем виде задача несимметричного изгиба полярно-ортотропных кольцевых пластин переменной толщины, скрепленных с упругим основанием Пастернака. Дифференциальное уравнение в частных производных, описывающее несимметричный изгиб пластины под действием поперечной нагрузки путем разложения функции прогиба и интенсивности нагрузки в ряды Фурье по угловой координате, сводится к бесконечной системе неоднородных обыкновенных дифференциальных уравнений 4-го порядка для радиальных функций прогиба пластины. Данные дифференциальные уравнения сводятся к линейным интегральным уравнениям Вольтерры 2-го рода. Решения интегральных уравнений записываются с помощью резольвенты. Приводятся расчетные формулы для изгибающих и крутящих моментов, поперечных усилий и функции прогиба, а также формулы для расчета нормальных и касательных напряжений в кольцевой пластине.

Ключевые слова: анизотропия; кольцевая пластина; основание Пастернака; несимметричный изгиб; дифференциальные уравнения; интегральные уравнения Вольтерры; резольвента.

In this work is solved in general form an asymmetric bending problem of polar-orthotropic annular plates of variable thickness, tied with elastic Pasternak base. A differential equation in partial derivatives, describing the asymmetric bending of the plate under the influence of transverse loading, by the expansion of the bending function and the load intensity are laid out Fourier series by the angular coordinate, comes down to an infinite system of inhomogeneous ordinary differential equations of the fourth kind for radial functions of the plate bending. Given differential equations come down to linear Volterra integral equations of the 2^{nd} kind. Solutions of these integral equations are written using the resolvent. The calculated formulas for bending and torsion moments, for transverse forces, for the function of bending and formulas for calculating normal and tangential stresses in the annular plates are given.

Key words: anisotropy; annular plates; Pasternak base; asymmetrical bending; differential equations; Volterra integral equations; resolvent.

С помощью линейных интегральных уравнений Вольтерры 2-го рода исследуем напряженно-деформированное состояние анизотропных кольцевых пластин переменной толщины, подверженных несимметричному изгибу под воздействием распределенной поперечной нагрузки $q_z(r,\theta)$. Пластина изготовлена из цилиндрически ортотропного материала и скреплена с упругим основанием Пастернака.

Введем цилиндрическую систему координат r,θ,z, поместив начало в точке пересечения оси анизотропии со срединной плоскостью пластины.

Внутренний радиус кольцевой пластины обозначим r_0, а внешний – R. Толщина кольцевой пластины $h(r)$ меняется вдоль радиуса r по заданному закону и на внутреннем контуре равна h_0.

Расчет кольцевой пластины будем проводить в рамках классической теории изгиба тонких пластин, основанной на гипотезах Кирхгофа.

Обозначим перемещения точек срединной поверхности пластины в направлении оси z через $w(r,\theta)$.

Согласно модели Пастернака связь реакции $q_r(r,\theta)$ упругого основания с функцией прогиба $w(r,\theta)$ задается в виде [1]

$$q_r(r,\theta)=k_0w(r,\theta)-k_1\Delta w(r,\theta), \tag{1}$$

где k_0 – коэффициент сопротивления сжатию упругого основания; k_1 – коэффициент сопротивления сдвигу упругого основания; Δ – оператор Лапласа в цилиндрических координатах;

$$\Delta w(r,\theta)=\left(\frac{\partial^2 w(r,\theta)}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial w(r,\theta)}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 w(r,\theta)}{\partial\theta^2}\right).$$

Если коэффициент $k_1 = 0$, то имеем упругое основание Винклера.

Выделим из пластины двумя меридиональными плоскостями, образующими с координатной плоскостью rz углы θ и $\theta+d\theta$, и двумя цилиндрическими поверхностями радиусом r и $r + dr$, нормальными к срединной плоскости, бесконечно малый элемент пластины. Запишем систему уравнений равновесия этого элемента в усилиях и моментах [2]:

$$\begin{gathered}\frac{\partial(rQ_r)}{\partial r}+\frac{\partial Q_\theta}{\partial\theta}+(q_z-q_r)\,r=0,\\ \frac{\partial(rM_r)}{\partial r}+\frac{\partial M_{\theta r}}{\partial\theta}-M_\theta-rQ_r=0,\\ \frac{\partial(rM_{r\theta})}{\partial r}+\frac{\partial M_\theta}{\partial\theta}+M_{\theta r}-rQ_\theta=0,\end{gathered} \tag{2}$$

где $M_r(r,\theta), M_{r\theta}(r,\theta), Q_r(r,\theta)$ – изгибающий и крутящий моменты, поперечное усилие соответственно, действующие в цилиндрическом сечении; $M_\theta(r,\theta), M_{\theta r}(r,\theta), Q_\theta(r,\theta)$ – изгибающий и крутящий моменты, поперечное усилие соответственно, действующие в радиальном сечении; $M_{r\theta}(r,\theta)=M_{\theta r}(r,\theta)$.

Из последних двух уравнений системы (2) выразим поперечные усилия $Q_r(r,\theta)$, $Q_\theta(r,\theta)$ через изгибающие $M_r(r,\theta), M_\theta(r,\theta)$ и крутящий $M_{r\theta}(r,\theta)$ моменты:

$$Q_r(r,\theta)=\frac{1}{r}\left(\frac{\partial(rM_r)}{\partial r}+\frac{\partial M_{r\theta}}{\partial\theta}-M_\theta\right),\quad Q_\theta(r,\theta)=\frac{1}{r}\left(\frac{\partial(rM_{r\theta})}{\partial r}+\frac{\partial M_\theta}{\partial\theta}+M_{r\theta}\right). \tag{3}$$

Подставим выражение для реакции упругого основания из (1) и правые части выражений для поперечных усилий из (3) в первое уравнение системы (2). В результате получим уравнение вида

$$\frac{\partial^2 M_r}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial M_r}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 M_\theta}{\partial \theta^2}-\frac{1}{r}\frac{\partial M_\theta}{\partial r}+\frac{2}{r}\frac{\partial^2 M_{r\theta}}{\partial r\partial\theta}+\frac{2}{r^2}\frac{\partial M_{r\theta}}{\partial\theta}+$$

$$+q_z(r,\theta)-k_0 w+k_1\left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 w}{\partial\theta^2}\right)=0. \qquad (4)$$

Выразим изгибающие моменты $M_r(r,\theta), M_\theta(r,\theta)$, крутящий момент $M_{r\theta}(r,\theta)$ и поперечные усилия $Q_r(r,\theta), Q_\theta(r,\theta)$ через функцию прогиба $w(r,\theta)$ [3]:

$$M_r(r,\theta)=-D_{11}(r)\left[\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}+\nu_{\theta r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 w}{\partial\theta^2}\right)\right];$$

$$M_\theta(r,\theta)=-D_{11}(r)\left[\nu_{\theta r}\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}+k^2\left(\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 w}{\partial\theta^2}\right)\right];$$

$$M_{r\theta}(r,\theta)=-cD_{11}(r)\left(\frac{1}{r}\frac{\partial^2 w}{\partial r\partial\theta}-\frac{1}{r^2}\frac{\partial w}{\partial\theta}\right); \qquad (5)$$

$$Q_r(r,\theta)=-D_{11}(r)\left[\left(\frac{\partial^3 w}{\partial r^3}+\frac{1}{r}\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}\right)+(c+\nu_{\theta r})\left(\frac{1}{r^2}\frac{\partial^3 w}{\partial r\partial\theta^2}-\frac{1}{r^3}\frac{\partial^2 w}{\partial\theta^2}\right)-\right.$$

$$\left.-k^2\left(\frac{1}{r^2}\frac{\partial w}{\partial r}+\frac{1}{r^3}\frac{\partial^2 w}{\partial\theta^2}\right)\right]-\frac{dD_{11}}{dr}\left[\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}+\nu_{\theta r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 w}{\partial\theta^2}\right)\right];$$

$$Q_\theta(r,\theta)=-D_{11}(r)\left[(c+\nu_{\theta r})\frac{1}{r}\frac{\partial^3 w}{\partial r^2\partial\theta}+k^2\left(\frac{1}{r^3}\frac{\partial^3 w}{\partial\theta^3}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 w}{\partial r\partial\theta}\right)\right]-c\frac{dD_{11}}{dr}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial^2 w}{\partial r\partial\theta}-\frac{1}{r^2}\frac{\partial w}{\partial\theta}\right),$$

где $D_{11}(r)=\dfrac{E_\theta h^3(r)}{12(k^2-\nu_{\theta r}^2)}$ – цилиндрическая жесткость изгиба полярно-ортотропной пластины; $c=\dfrac{2(k^2-\nu_{\theta r}^2)G_{r\theta}}{E_\theta}$, $k^2=\dfrac{E_\theta}{E_r}$, E_r, E_θ – модули Юнга при растяжении (сжатии) цилиндрически ортотропного тела в направлении осей r и θ соответственно; $G_{r\theta}$ – модуль сдвига; $\nu_{\theta r}$ – коэффициент Пуассона.

Подставляя в уравнение (4) выражения для моментов $M_r(r,\theta), M_\theta(r,\theta), M_{r\theta}(r,\theta)$ из (5), получим ***основное дифференциальное уравнение несимметричного изгиба полярно-ортотропной кольцевой пластины переменной толщины, скрепленной с упругим основанием Пастернака:***

$$\frac{\partial^4 w}{\partial r^4}+\frac{2(c+\nu_{\theta r})}{r^2}\frac{\partial^4 w}{\partial r^2\partial\theta^2}+\frac{k^2}{r^4}\frac{\partial^4 w}{\partial\theta^4}+2\left(\frac{D'_{11}}{D_{11}}+\frac{1}{r}\right)\frac{\partial^3 w}{\partial r^3}+\frac{2(c+\nu_{\theta r})}{r^2}\left(\frac{D'_{11}}{D_{11}}-\frac{1}{r}\right)\frac{\partial^3 w}{\partial r\partial\theta^2}+$$

$$+\left[\frac{D''_{11}}{D_{11}}+\frac{(2+\nu_{\theta r})}{r}\frac{D'_{11}}{D_{11}}-\frac{k_1}{D_{11}}-\frac{k^2}{r^2}\right]\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}+\left[\frac{\nu_{\theta r}}{r^2}\frac{D''_{11}}{D_{11}}-\frac{\left[2(c+\nu_{\theta r})+k^2\right]}{r^3}\frac{D'_{11}}{D_{11}}-\frac{k_1}{r^2 D_{11}}+\right.$$

$$\left.+\frac{2(c+\nu_{\theta r}+k^2)}{r^4}\right]\frac{\partial^2 w}{\partial\theta^2}+\left[\frac{\nu_{\theta r}}{r}\frac{D''_{11}}{D_{11}}-\frac{k^2}{r^2}\frac{D'_{11}}{D_{11}}-\frac{k_1}{rD_{11}}+\frac{k^2}{r^3}\right]\frac{\partial w}{\partial r}+\frac{k_0}{D_{11}(r)}w=\frac{q_z(r,\theta)}{D_{11}(r)}. \qquad (6)$$

Представим функцию прогиба $w(r,\theta)$ и поперечную нагрузку $q_z(r,\theta)$ в виде следующих рядов Фурье:

$$w(r,\theta) = W_0(r) + \sum_{n=1}^{\infty} W_n^{(1)}(r)\cos n\theta + \sum_{n=1}^{\infty} W_n^{(2)}(r)\sin n\theta;$$
$$q_z(r,\theta) = q_z^{(0)}(r) + \sum_{n=1}^{\infty} q_{z,n}^{(1)}(r)\cos n\theta + \sum_{n=1}^{\infty} q_{z,n}^{(2)}(r)\sin n\theta. \qquad (7)$$

Первое слагаемое в разложении для функции прогиба $w(r,\theta)$ учитывает его осесимметричную составляющую. Слагаемые, содержащие $\cos n\theta$, соответствуют симметричным составляющим функции $w(r,\theta)$ относительно плоскости $\theta = 0$, а слагаемые, содержащие $\sin n\theta$, – обратно симметричным.

Подставляя разложения (7) в уравнение (6), получим бесконечную систему обыкновенных дифференциальных уравнений 4-го порядка для функций $W_0(r), W_n^{(i)}(r)$ $(i = 1, 2)$:

$(n = 0)$

$$\frac{d^4W_0}{dr^4} + 2\left(\frac{D_{11}'}{D_{11}} + \frac{1}{r}\right)\frac{d^3W_0}{dr^3} + \left[\frac{D_{11}''}{D_{11}} + \frac{(2+\nu_{\theta r})}{r}\frac{D_{11}'}{D_{11}} - \frac{k_1}{D_{11}} - \frac{k^2}{r^2}\right]\frac{d^2W_0}{dr^2} +$$
$$+\left[\frac{\nu_{\theta r}}{r}\frac{D_{11}''}{D_{11}} - \frac{k^2}{r^2}\frac{D_{11}'}{D_{11}} - \frac{k_1}{rD_{11}} + \frac{k^2}{r^3}\right]\frac{dW_0}{dr} + \frac{k_0}{D_{11}(r)}W_0 = \frac{q_z^{(0)}(r)}{D_{11}(r)}; \qquad (8)$$

$(n = 1, 2, 3, \ldots)$

$$\frac{d^4W_n^{(i)}}{dr^4} + 2\left(\frac{D_{11}'}{D_{11}} + \frac{1}{r}\right)\frac{d^3W_n^{(i)}}{dr^3} + \left[\frac{D_{11}''}{D_{11}} + \frac{(2+\nu_{\theta r})}{r}\frac{D_{11}'}{D_{11}} - \frac{k_1}{D_{11}} - \frac{\left[2(c+\nu_{\theta r})n^2 + k^2\right]}{r^2}\right]\frac{d^2W_n^{(i)}}{dr^2} +$$
$$+\left[\frac{\nu_{\theta r}}{r}\frac{D_{11}''}{D_{11}} - \frac{\left[2(c+\nu_{\theta r})n^2 + k^2\right]}{r^2}\frac{D_{11}'}{D_{11}} - \frac{k_1}{rD_{11}} + \frac{\left[2(c+\nu_{\theta r})n^2 + k^2\right]}{r^3}\right]\frac{dW_n^{(i)}}{dr} - \qquad (9)$$
$$-\left[n^2\frac{\nu_{\theta r}}{r^2}\frac{D_{11}''}{D_{11}} - \frac{\left[2(c+\nu_{\theta r}) + k^2\right]n^2}{r^3}\frac{D_{11}'}{D_{11}} - \left(k_0 + \frac{n^2}{r^2}k_1\right)\frac{1}{D_{11}} + \frac{\left[2\left(c+\nu_{\theta r}+k^2\right) - n^2k^2\right]n^2}{r^4}\right]W_n^{(i)} = \frac{q_{z,n}^{(i)}(r)}{D_{11}(r)}.$$

Задача осесимметричного изгиба полярно-ортотропной кольцевой пластины на упругом основании Пастернака (уравнение (8)) ранее нами была рассмотрена в работе [4].

Представим дифференциальные уравнения (9) в следующем виде:

$$\frac{d^4W_n^{(i)}}{dr^4} + a^{(1)}(r)\frac{d^3W_n^{(i)}}{dr^3} + a_n^{(2)}(r)\frac{d^2W_n^{(i)}}{dr^2} + 2a_n^{(3)}(r)\frac{dW_n^{(i)}}{dr} + 6a_n^{(4)}(r)W_n^{(i)} = \frac{q_{z,n}^{(i)}(r)}{D_{11}(r)}, \qquad (10)$$

где $a^{(1)}(r) = 2\left(\frac{D_{11}'}{D_{11}} + \frac{1}{r}\right)$; $a_n^{(2)}(r) = \left[\frac{D_{11}''}{D_{11}} + \frac{(2+\nu_{\theta r})}{r}\frac{D_{11}'}{D_{11}} - \frac{k_1}{D_{11}} - \frac{\left[2(c+\nu_{\theta r})n^2 + k^2\right]}{r^2}\right]$;

$$a_n^{(3)}(r) = \frac{1}{2}\left[\frac{\nu_{\theta r}}{r}\frac{D_{11}''}{D_{11}} - \frac{\left[2(c+\nu_{\theta r})n^2 + k^2\right]}{r^2}\frac{D_{11}'}{D_{11}} - \frac{k_1}{rD_{11}} + \frac{\left[2(c+\nu_{\theta r})n^2 + k^2\right]}{r^3}\right];$$
$$a_n^{(4)}(r) = -\frac{1}{6}\left[n^2\frac{\nu_{\theta r}}{r^2}\frac{D_{11}''}{D_{11}} - \frac{\left[2(c+\nu_{\theta r}) + k^2\right]n^2}{r^3}\frac{D_{11}'}{D_{11}} - \left(k_0 + \frac{n^2}{r^2}k_1\right)\frac{1}{D_{11}} + \frac{\left[2\left(c+\nu_{\theta r}+k^2\right) - n^2k^2\right]n^2}{r^4}\right].$$

Сведем задачу решения дифференциальных уравнений (10) к решению соответствующих линейных интегральных уравнений Вольтерры 2-го рода. Полагаем

$$\frac{d^4 W_n^{(i)}}{dr^4} = p_n^{(i)}(r). \tag{11}$$

Последовательно интегрируя выражение (11), получим

$$\frac{d^3 W_n^{(i)}}{dr^3} = \int_{r_0}^{r} p_n^{(i)}(s)\,ds + \dddot{W}_n^{(i)}(r_0); \quad \frac{d^2 W_n^{(i)}}{dr^2} = \int_{r_0}^{r} (r-s)\, p_n^{(i)}(s)\,ds + \dddot{W}_n^{(i)}(r_0)(r-r_0) + \ddot{W}_n^{(i)}(r_0);$$

$$\frac{dW_n^{(i)}}{dr} = \frac{1}{2}\int_{r_0}^{r} (r-s)^2\, p_n^{(i)}(s)\,ds + \frac{1}{2}\dddot{W}_n^{(i)}(r_0)(r-r_0)^2 + \ddot{W}_n^{(i)}(r_0)(r-r_0) + \dot{W}_n^{(i)}(r_0); \tag{12}$$

$$W_n^{(i)}(r) = \frac{1}{6}\int_{r_0}^{r} (r-s)^3\, p_n^{(i)}(s)\,ds + \frac{1}{6}\dddot{W}_n^{(i)}(r_0)(r-r_0)^3 + \frac{1}{2}\ddot{W}_n^{(i)}(r_0)(r-r_0)^2 + \dot{W}_n^{(i)}(r_0)(r-r_0) + W_n^{(i)}(r_0).$$

Здесь использовалось известное тождество Дирихле [5]:

$$\underbrace{\int_{r_0}^{r} dr_1 \int_{r_0}^{r_1} dr_2 \ldots \int_{r_0}^{r_{n-1}} f(r_n)\,dr_n}_{n} = \frac{1}{(n-1)!}\int_{r_0}^{r} (r-s)^{n-1} f(s)\,ds.$$

Подставим в дифференциальные уравнения (10) вместо функции $W_n^{(i)}(r)$ и ее производных правые части выражений (11), (12). В результате получим линейные интегральные уравнения Вольтерры 2-го рода:

$$p_n^{(i)}(r) = \lambda \int_{r_0}^{r} K_n(r,s)\, p_n^{(i)}(s)\,ds + g_n^{(i)}(r), \tag{13}$$

где числовые параметры: $\lambda = -1$; $n \in \mathbf{N}$; $i = 1, 2$;

$K_n(r,s) = \left[a^{(1)}(r) + a_n^{(2)}(r)(r-s) + a_n^{(3)}(r)(r-s)^2 + a_n^{(4)}(r)(r-s)^3 \right]$ – ядра интегральных уравнений; $g_n^{(i)}(r)$ – свободные члены интегральных уравнений, имеющие вид

$$g_n^{(i)}(r) = \frac{\partial^3 K_n(r,r_0)}{\partial s^3} W_n^{(i)}(r_0) - \frac{\partial^2 K_n(r,r_0)}{\partial s^2} \dot{W}_n^{(i)}(r_0) +$$

$$+ \frac{\partial K_n(r,r_0)}{\partial s} \ddot{W}_n^{(i)}(r_0) - K_n(r,r_0)\dddot{W}_n^{(i)}(r_0) + \frac{q_{z,n}^{(i)}(r)}{D_{11}(r)}.$$

Здесь введены обозначения: $\dfrac{\partial^l K_n(r,r_0)}{\partial s^l} = \dfrac{\partial^l K_n(r,s)}{\partial s^l}\Big|_{s=r_0}$ $\left(l = \overline{1,3}\right)$.

Так, при изменении толщины $h(r)$ диска по степенному закону

$$h(r) = h_0\left(\frac{r}{r_0}\right)^{\alpha}, \ \alpha \in R,$$

ядра $K_n(r,s)$ интегральных уравнений (13) имеют вид

$$K_n(r,s) = \left\{ \left[\frac{\left(A^{(1)} + A_n^{(2)} + A_n^{(3)} + A_n^{(4)}\right)}{r} + \frac{\left(n^2-9\right)\tilde{k}_1}{r^{3\alpha-1}} + \frac{\tilde{k}_0}{r^{3\alpha-3}} \right] - \left[\frac{\left(A_n^{(2)} + 2A_n^{(3)} + 3A_n^{(4)}\right)}{r^2} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{3\left(n^2-4\right)\tilde{k}_1}{r^{3\alpha}} + \frac{3\tilde{k}_0}{r^{3\alpha-2}} \right] s + \left[\frac{\left(A_n^{(3)} + 3A_n^{(4)}\right)}{r^3} + \frac{3\left(n^2-1\right)\tilde{k}_1}{r^{3\alpha+1}} + \frac{3\tilde{k}_0}{r^{3\alpha-1}} \right] s^2 - \left(\frac{A_n^{(4)}}{r^4} + \frac{n^2\tilde{k}_1}{r^{3\alpha+2}} + \frac{\tilde{k}_0}{r^{3\alpha}} \right) s^3 \right\},$$

где $A^{(1)} = 2(3\alpha+1)$; $A_n^{(2)} = \left\{ 3\alpha(3\alpha+1) + \left[\left(3\alpha\nu_{\theta r} - k^2\right) - 2\left(c + \nu_{\theta r}\right) n^2 \right] \right\}$;

$$A_n^{(3)} = \frac{1}{2}(3\alpha - 1)\left[\left(3\alpha\nu_{\theta r} - k^2\right) - 2\left(c + \nu_{\theta r}\right)n^2\right];$$

$$A_n^{(4)} = -\frac{n^2}{6}\left\{(3\alpha - 1)\left[\left(3\alpha\nu_{\theta r} - k^2\right) - 2\left(c + \nu_{\theta r}\right)\right] - \left(n^2 - 1\right)k^2\right\},$$

$$\tilde{k}_1 = \frac{2\left(k^2 - \nu_{\theta r}^2\right)r_0^{3\alpha}}{E_\theta h_0^3}k_1, \quad \tilde{k}_0 = \frac{2\left(k^2 - \nu_{\theta r}^2\right)r_0^{3\alpha}}{E_\theta h_0^3}k_0.$$

Общие решения линейных интегральных уравнений Вольтерры 2-го рода (13) записываются с помощью *резольвенты* $R_n(r,s;\lambda)$ в виде [5]

$$p_n^{(i)}(r) = \lambda\int_{r_0}^{r} R_n(r,s;\lambda)\,g_n^{(i)}(s)\,ds + g_n^{(i)}(r). \qquad (14)$$

Здесь функция $R_n(r,s;\lambda)$ определяется функциональным рядом

$$R_n(r,s;\lambda) = \sum_{m=0}^{\infty}\lambda^m K_{m+1}^{(n)}(r,s),$$

который для непрерывных ядер $K_n(r,s)$ сходится абсолютно и равномерно.

Повторяющиеся или *итерированные ядра* $K_m^{(n)}(r,s)$ определяются по следующим рекуррентным формулам:

$$K_1^{(n)}(r,s) = K_n(r,s);$$

$$K_2^{(n)}(r,s) = \int_s^r K_n(r,t)K_1^{(n)}(t,s)\,dt;$$

……………………………………..

$$K_m^{(n)}(r,s) = \int_s^r K_n(r,t)K_{m-1}^{(n)}(t,s)\,dt.$$

Если свободные члены $g_n^{(i)}(r)$ непрерывны в $[r_0, R]$, а ядра $K_n(r,s)$ непрерывны при $r_0 \le r \le R$, $r_0 \le s \le r$, то линейные интегральные уравнения Вольтерры 2-го рода (13) имеют при любом параметре $\lambda(\lambda \ne 0)$ единственные непрерывные решения, определяемые формулой (14).

Отметим, что интегральные уравнения Вольтерры 2-го рода можно решать и другими аналитическими и численными методами, указанными, например, в работе [6].

Представим изгибающие моменты $M_r(r,\theta), M_\theta(r,\theta)$, крутящие моменты $M_{r\theta}(r,\theta) = M_{\theta r}(r,\theta)$ и поперечные усилия $Q_r(r,\theta), Q_\theta(r,\theta)$ в виде следующих рядов Фурье:

$$M_r(r,\theta) = M_r^{(0)}(r) + \sum_{n=1}^{\infty}M_{r,n}^{(1)}(r)\cos n\theta + \sum_{n=1}^{\infty}M_{r,n}^{(2)}(r)\sin n\theta;$$

$$M_\theta(r,\theta) = M_\theta^{(0)}(r) + \sum_{n=1}^{\infty}M_{\theta,n}^{(1)}(r)\cos n\theta + \sum_{n=1}^{\infty}M_{\theta,n}^{(2)}(r)\sin n\theta;$$

$$M_{r\theta}(r,\theta) = M_{\theta r}(r,\theta) = \sum_{n=1}^{\infty}M_{r\theta,n}^{(1)}(r)\sin n\theta + \sum_{n=1}^{\infty}M_{r\theta,n}^{(2)}(r)\cos n\theta;$$

$$Q_r(r,\theta) = Q_r^{(0)}(r) + \sum_{n=1}^{\infty}Q_{r,n}^{(1)}(r)\cos n\theta + \sum_{n=1}^{\infty}Q_{r,n}^{(2)}(r)\sin n\theta;$$

$$Q_\theta(r,\theta) = \sum_{n=1}^{\infty}Q_{\theta,n}^{(1)}(r)\sin n\theta + \sum_{n=1}^{\infty}Q_{\theta,n}^{(2)}(r)\cos n\theta.$$

Здесь $M_r^{(0)}(r), M_{r,n}^{(i)}(r), M_\theta^{(0)}(r), M_{\theta,n}^{(i)}(r), M_{r\theta,n}^{(i)}(r), Q_r^{(0)}(r), Q_{r,n}^{(i)}(r), Q_{\theta,n}^{(i)}(r)$ выражаются через разрешающие функции $p_n^{(i)}(r), Y(r)$ по формулам

$$M_r^{(0)}(r) = -D_{11}(r)\left[\int_{r_0}^{r} K_{M_r}^{(0)}(r,s)Y(s)\,ds + K_{M_r}^{(0)}(r,r_0)\dddot{W}_0(r_0) - \frac{\partial K_{M_r}^{(0)}(r,r_0)}{\partial s}\ddot{W}_0(r_0) + \frac{\partial^2 K_{M_r}^{(0)}(r,r_0)}{\partial s^2}\dot{W}_0(r_0)\right];$$

$$M_{r,n}^{(i)}(r) = -D_{11}(r)\left[\int_{r_0}^{r} K_{M_r}^{(n)}(r,s)p_n^{(i)}(s)\,ds + K_{M_r}^{(n)}(r,r_0)\dddot{W}_n^{(i)}(r_0) - \right.$$
$$\left. - \frac{\partial K_{M_r}^{(n)}(r,r_0)}{\partial s}\ddot{W}_n^{(i)}(r_0) + \frac{\partial^2 K_{M_r}^{(n)}(r,r_0)}{\partial s^2}\dot{W}_n^{(i)}(r_0) - \frac{\partial^3 K_{M_r}^{(n)}(r,r_0)}{\partial s^3}W_n^{(i)}(r_0)\right];$$

$$M_\theta^{(0)}(r) = -D_{11}(r)\left[\int_{r_0}^{r} K_{M_\theta}^{(0)}(r,s)Y(s)\,ds + K_{M_\theta}^{(0)}(r,r_0)\dddot{W}_0(r_0) - \frac{\partial K_{M_\theta}^{(0)}(r,r_0)}{\partial s}\ddot{W}_0(r_0) + \frac{\partial^2 K_{M_\theta}^{(0)}(r,r_0)}{\partial s^2}\dot{W}_0(r_0)\right];$$

$$M_{\theta,n}^{(i)}(r) = -D_{11}(r)\left[\int_{r_0}^{r} K_{M_\theta}^{(n)}(r,s)p_n^{(i)}(s)\,ds + K_{M_\theta}^{(n)}(r,r_0)\dddot{W}_n^{(i)}(r_0) - \right.$$
$$\left. - \frac{\partial K_{M_\theta}^{(n)}(r,r_0)}{\partial s}\ddot{W}_n^{(i)}(r_0) + \frac{\partial^2 K_{M_\theta}^{(n)}(r,r_0)}{\partial s^2}\dot{W}_n^{(i)}(r_0) - \frac{\partial^3 K_{M_\theta}^{(n)}(r,r_0)}{\partial s^3}W_n^{(i)}(r_0)\right];$$

$$M_{r\theta,n}^{(i)}(r) = (-1)^{i-1}D_{11}(r)\left[\int_{r_0}^{r} K_{M_{r\theta}}^{(n)}(r,s)p_n^{(i)}(s)\,ds + K_{M_{r\theta}}^{(n)}(r,r_0)\dddot{W}_n^{(i)}(r_0) - \right.$$
$$\left. - \frac{\partial K_{M_{r\theta}}^{(n)}(r,r_0)}{\partial s}\ddot{W}_n^{(i)}(r_0) + \frac{\partial^2 K_{M_{r\theta}}^{(n)}(r,r_0)}{\partial s^2}\dot{W}_n^{(i)}(r_0) - \frac{\partial^3 K_{M_{r\theta}}^{(n)}(r,r_0)}{\partial s^3}W_n^{(i)}(r_0)\right];$$

$$Q_r^{(0)}(r) = -D_{11}(r)\left[\int_{r_0}^{r} K_{Q_r}^{(0)}(r,s)Y(s)\,ds + K_{Q_r}^{(0)}(r,r_0)\dddot{W}_0(r_0) - \frac{\partial K_{Q_r}^{(0)}(r,r_0)}{\partial s}\ddot{W}_0(r_0) + \frac{\partial^2 K_{Q_r}^{(0)}(r,r_0)}{\partial s^2}\dot{W}_0(r_0)\right];$$

$$Q_{r,n}^{(i)}(r) = -D_{11}(r)\left[\int_{r_0}^{r} K_{Q_r}^{(n)}(r,s)p_n^{(i)}(s)\,ds + K_{Q_r}^{(n)}(r,r_0)\dddot{W}_n^{(i)}(r_0) - \right.$$
$$\left. - \frac{\partial K_{Q_r}^{(n)}(r,r_0)}{\partial s}\ddot{W}_n^{(i)}(r_0) + \frac{\partial^2 K_{Q_r}^{(n)}(r,r_0)}{\partial s^2}\dot{W}_n^{(i)}(r_0) - \frac{\partial^3 K_{Q_r}^{(n)}(r,r_0)}{\partial s^3}W_n^{(i)}(r_0)\right];$$

$$Q_{\theta,n}^{(i)}(r) = (-1)^{i-1}D_{11}(r)\left[\int_{r_0}^{r} K_{Q_\theta}^{(n)}(r,s)p_n^{(i)}(s)\,ds + K_{Q_\theta}^{(n)}(r,r_0)\dddot{W}_n^{(i)}(r_0) - \right.$$
$$\left. - \frac{\partial K_{Q_\theta}^{(n)}(r,r_0)}{\partial s}\ddot{W}_n^{(i)}(r_0) + \frac{\partial^2 K_{Q_\theta}^{(n)}(r,r_0)}{\partial s^2}\dot{W}_n^{(i)}(r_0) - \frac{\partial^3 K_{Q_\theta}^{(n)}(r,r_0)}{\partial s^3}W_n^{(i)}(r_0)\right],$$

где передаточные (весовые) функции имеют вид

$$K_{M_r}^{(0)}(r,s) = \left[1 + \nu_{\theta r}\frac{(r-s)}{2r}\right](r-s),\quad K_{M_r}^{(n)}(r,s) = \left[1 + \nu_{\theta r}\frac{(r-s)}{2r} - n^2\nu_{\theta r}\frac{(r-s)^2}{6r^2}\right](r-s);$$

$$K_{M_\theta}^{(0)}(r,s) = \left[\nu_{\theta r} + k^2\frac{(r-s)}{2r}\right](r-s),\quad K_{M_\theta}^{(n)}(r,s) = \left[\nu_{\theta r} + k^2\frac{(r-s)}{2r} - n^2k^2\frac{(r-s)^2}{6r^2}\right](r-s);$$

$$K_{M_{r\theta}}^{(n)}(r,s) = nc\left[\frac{(r-s)^2}{2r} - \frac{(r-s)^3}{6r^2}\right];\ K_{Q_r}^{(0)}(r,s) = \left[1 + \left(\frac{D'_{11}}{D_{11}} + \frac{1}{r}\right)(r-s) + \left(\nu_{\theta r}\frac{D'_{11}}{D_{11}} - \frac{k^2}{r}\right)\frac{(r-s)^2}{2r}\right];$$

$$K_{Q_r}^{(n)}(r,s)=\left[1+\left(\frac{D'_{11}}{D_{11}}+\frac{1}{r}\right)(r-s)+\left(\nu_{\theta r}\frac{D'_{11}}{D_{11}}-\frac{\left[(c+\nu_{\theta r})n^2+k^2\right]}{r}\right)\frac{(r-s)^2}{2r}-\right.$$
$$\left.-n^2\left(\nu_{\theta r}\frac{D'_{11}}{D_{11}}-\frac{\left[(c+\nu_{\theta r})+k^2\right]}{r}\right)\frac{(r-s)^3}{6r^2}\right];$$

$$K_{Q_\theta}^{(n)}(r,s)=n\left[\frac{(c+\nu_{\theta r})}{r}+\left(c\frac{D'_{11}}{D_{11}}+\frac{k^2}{r}\right)\frac{(r-s)}{2r}-\left(c\frac{D'_{11}}{D_{11}}+\frac{n^2k^2}{r}\right)\frac{(r-s)^2}{6r^2}\right](r-s).$$

Функция $Y(r)$ является решением интегрального уравнения Вольтерры 2-го рода, рассмотренного в работе [4].

Постоянные величины $W_0(r_0), \dot{W}_0(r_0), \ddot{W}_0(r_0), \dddot{W}_0(r_0), W_n^{(i)}(r_0), \dot{W}_n^{(i)}(r_0), \ddot{W}_n^{(i)}(r_0), \dddot{W}_n^{(i)}(r_0)$ определяются из граничных условий на контурах диска:

1. Если внутренний и/или внешний контур диска жестко закреплен или защемлен, то

$$w(r_i,\theta)=0,\ \frac{\partial w(r_i,\theta)}{\partial r}=0\ (i=1,2),$$

где $r_1=r_0,\ r_2=R.$

2. Для шарнирно опертого края диска:

$$w(r_i,\theta)=0,\ M_r(r_i,\theta)=0.$$

3. Для свободного края диска:

$$M_r(r_i,\theta)=0,\ Q_r(r_i,\theta)+\frac{1}{r_i}\frac{\partial M_{r\theta}(r_i,\theta)}{\partial\theta}=0.$$

Когда найденное решение интегрального уравнения удовлетворяет заданным граничным условиям, можем рассчитать по известным формулам нормальные $\sigma_r(r,\theta,z),\sigma_\theta(r,\theta,z)$ и касательные $\tau_{r\theta}(r,\theta,z),\tau_{\theta z}(r,\theta),\tau_{rz}(r,\theta)$ напряжения в диске, возникающие при его изгибе под действием распределенной поперечной нагрузки:

$$\sigma_r(r,\theta,z)=z\frac{12M_r(r,\theta)}{h^3(r)},\ \sigma_\theta(r,\theta,z)=z\frac{12M_\theta(r,\theta)}{h^3(r)},$$

$$\tau_{r\theta}(r,\theta,z)=z\frac{12M_{r\theta}(r,\theta)}{h^3(r)},\ \tau_{rz}(r,\theta)=\frac{Q_r(r,\theta)}{h(r)},\ \tau_{\theta z}(r,\theta)=\frac{Q_\theta(r,\theta)}{h(r)}.$$

Максимум нормальных $\sigma_r(r,\theta,z),\sigma_\theta(r,\theta,z)$ и касательных $\tau_{r\theta}(r,\theta,z)=\tau_{\theta r}(r,\theta,z)$ напряжений достигается на внешних поверхностях пластины при $z=\pm\frac{h}{2}$.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Власов В. З., Леонтьев Н. И. Балки, плиты, оболочки на упругом основании. М., 1960.
2. Коваленко А. Д. Круглые пластины переменной толщины. М., 1959.
3. Королевич В. В., Медведев Д. Г. Интегральные уравнения Вольтерры 2-го рода в задачах изгиба вращающихся полярно-ортотропных дисков переменной толщины // Вестн. БГУ. Сер. 1, Физика. Математика. Информатика. 2012. № 3. С. 108–116.
4. Королевич В. В., Медведев Д. Г. Интегральные уравнения Вольтерры 2-го рода в задачах осесимметричного изгиба полярно-ортотропных кольцевых пластин переменной толщины, скрепленных с упругим основанием Пастернака // Вестн. БГУ. Сер. 1, Физика. Математика. Информатика. 2013. № 2. С. 99–105.
5. Краснов М. Л., Киселев А. И., Макаренко Г. И. Интегральные уравнения: задачи и примеры с подробными решениями. М., 2007.
6. Верлань А. Ф., Сизиков В. С. Интегральные уравнения: методы, алгоритмы, программы : справ. пособие. Киев, 1986.

Поступила в редакцию 10.01.2014.

Владимир Васильевич Королевич – преподаватель Национального педагогического университета им. М. Драгоманова (Прага,Чехия).

Дмитрий Георгиевич Медведев – кандидат физико-математических наук, доцент, декан механико-математического факультета.